

2章 P27 演習問題 2.2

(1) ヤング率 E_1 のほうを伸びは、応力 σ は断面積 S と荷重 P より

$$\sigma = \frac{P}{S}$$

ひずみ ε_1 はフックの法則を変形して

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma}{E_1} \\ &= \frac{P}{SE_1}\end{aligned}$$

元の長さは $V_1 l$ なので伸びた量 Δl_1 は

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \varepsilon_1 \cdot V_1 l \\ &= \frac{PV_1}{SE_1} \cdot l \quad \text{となる。}\end{aligned}$$

同様にヤング率 E_2 の伸びた量 Δl_2 は

$$\Delta l_2 = \frac{PV_2}{SE_2} \cdot l$$

よって全体の伸びた量 Δl は

$$\begin{aligned}\Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 \\ &= \frac{PV_1}{SE_1} \cdot l + \frac{PV_2}{SE_2} \cdot l \\ &= \left(\frac{V_1}{E_1} + \frac{V_2}{E_2} \right) \frac{P}{S} \cdot l\end{aligned}$$

となる。

(2) フックの法則より平均のヤング率 E とした時のひずみ ε_E は

$$\varepsilon_E = \frac{P}{SE}$$

また合成する前のひずみ ε は (1) で出した伸び量から

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{で表される。}$$

ここで Δl は $\left(\frac{V_1}{E_1} + \frac{V_2}{E_2} \right) \frac{P}{S} \cdot l$ なので ε は

$$\varepsilon = \left(\frac{V_1}{E_1} + \frac{V_2}{E_2} \right) \frac{P}{S}$$

$\varepsilon_E = \varepsilon$ なので

$$\frac{P}{SE} = \left(\frac{V_1}{E_1} + \frac{V_2}{E_2} \right) \frac{P}{S}$$

となり平均のヤング率 E は

$$E = \frac{E_1}{V_1} + \frac{E_2}{V_2}$$

となる。