81218　八田　浩昴

３章　P61　問題 3.2

中立軸の位置

中立軸を決定する条件は，x 方向の軸力$N_x$が 0 になる位置である．

よって

$$N_x = \int_A \sigma dA = 0$$

ここで dA は

$$\mathrm{dA} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{d\eta}$$

また，σ はヤング率の複合側により

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{\rho}\eta, \sigma_2 = \frac{E_2}{\rho}\eta$$

以上を代入し

$$N_x = \int_{\eta_0 - \frac{h}{2}}^{\eta_0} \frac{E_1}{\rho} \eta b \cdot d\eta + \int_{\eta_0}^{\eta_0 + \frac{h}{2}} \frac{E_2}{\rho} \eta b \cdot d\eta = 0$$

となり．この積分を解くと

$$\frac{b}{\rho}\left( E_1 \int_{\eta_0 - \frac{h}{2}}^{\eta_0} \eta \cdot d\eta + E_2 \int_{\eta_0}^{\eta_0 + \frac{h}{2}} \eta \cdot d\eta \right) = 0$$

$$\frac{b}{2\rho}\left( E_1 [\eta^2]_{\eta_0 - \frac{h}{2}}^{\eta_0} + E_2 [\eta^2]_{\eta_0}^{\eta_0 + \frac{h}{2}} \right) = 0$$

$$E_1 [\eta^2]_{\eta_0 - \frac{h}{2}}^{\eta_0} + E_2 [\eta^2]_{\eta_0}^{\eta_0 + \frac{h}{2}} = 0$$

$$E_1 \left( {\eta_0}^2 - \left( \eta_0 - \frac{h}{2} \right)^2 \right) + E_2 \left( \left( \eta_0 + \frac{h}{2} \right)^2 - {\eta_0}^2 \right) = 0$$

$$E_1 \left( \eta_0 h - \frac{h^2}{4} \right) + E_2 \left( \eta_0 h + \frac{h^2}{4} \right) = 0$$

$$(E_1 + E_2)\eta_0 h + (E_2 - E_1)\frac{h^2}{4} = 0$$

ここで，$\eta_0$について解くと

$$\eta_0 = \frac{-(\mathrm{E_2} - \mathrm{E_1})}{(\mathrm{E_1} + \mathrm{E_2})}\frac{h}{4} = \frac{(\mathrm{E_1} - \mathrm{E_2})}{(\mathrm{E_1} + \mathrm{E_2})}\frac{h}{4}$$

となる.

よって，ヤング率が同じである場合$\eta_0 = 0$となり，中立軸の位置は$\frac{\mathrm{h}}{2}$ となる.

等価曲げ剛性

曲げモーメント$\mathrm{M_x}$を求める.

$$\mathrm{M_x} = \int_{\mathrm{A}} \sigma\eta \mathrm{dA}$$

より,

$$\mathrm{dA} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{d}\eta$$

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{E_1}}{\rho}\eta$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathrm{E_2}}{\rho}\eta$$

とすると

$$\mathrm{M_x} = \int_{-\mathrm{h}/2}^{0} \frac{\mathrm{E_1}}{\rho}\eta \cdot \eta \mathrm{b} \cdot \mathrm{d}\eta + \int_{0}^{\mathrm{h}/2} \frac{\mathrm{E_2}}{\rho}\eta \cdot \eta \mathrm{b} \cdot \mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{\mathrm{E_1 b}}{\rho}\int_{-\mathrm{h}/2}^{0} \eta^2 \mathrm{d}\eta + \frac{\mathrm{E_2 b}}{\rho}\int_{0}^{\mathrm{h}/2} \eta^2 \mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{\mathrm{E_1 b}}{\rho}\left[\frac{1}{3}\eta^3\right]_{-\mathrm{h}/2}^{0} + \frac{\mathrm{E_2 b}}{\rho}\left[\frac{1}{3}\eta^3\right]_{0}^{\mathrm{h}/2}$$

$$= \frac{\mathrm{E_1 b}}{\rho}\left[\frac{1}{3}\eta^3\right]_{-\mathrm{h}/2}^{0} + \frac{\mathrm{E_2 b}}{\rho}\left[\frac{1}{3}\eta^3\right]_{0}^{\mathrm{h}/2}$$

$$= \frac{\mathrm{E_1 b}}{\rho} \cdot \left(\frac{\mathrm{h}^3}{24}\right) + \frac{\mathrm{E_1 b}}{\rho} \cdot \left(\frac{\mathrm{h}^3}{24}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{bh}^3}{12\rho} \cdot \left(\frac{\mathrm{E_1}}{2} + \frac{\mathrm{E_2}}{2}\right) = \overline{\mathrm{IE}}$$

となる.