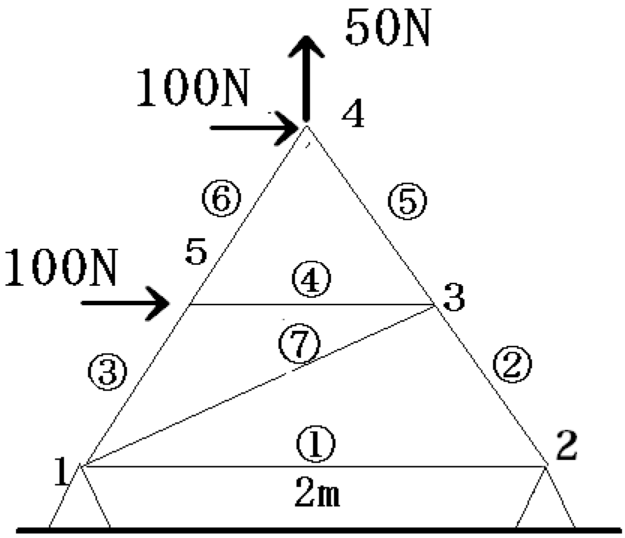
９１０８０　金子祐己　解答



・一辺２ｍの正三角形を考える
・部材④は１ｍとする
・節点１と２は固定端である

部材①　節点１をi、節点２をjとすると$\theta=0°$　しかし長さが２ｍなのでｋ’＝ｋ/2

$$K_{11}^{1}=K_{22}^{1}=k'\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$K_{12}=K_{21}=k\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

部材②　節点２をi、節点３をjとすると$\theta=120°$

$$K_{22}=K_{33}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$K_{23}=K_{32}=k\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

部材③　節点１をi節点５をjとすると$\theta=60°$

$$K_{11}=K_{55}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$K_{15}=K_{51}=k\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

部材④　節点 5 を i 節点 3 を j とすると $\theta=0^\circ$

$$K_{55}=K_{33}=k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$K_{35}=K_{53}=k\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

部材⑤　節点 3 を i 節点 4 を j とすると $\theta=120^\circ$

$$K_{33}=K_{44}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$K_{34}=K_{43}=k\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

部材⑥　節点 5 を i 節点 4 を j とすると $\theta=60^\circ$

$$K_{55}=K_{44}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$K_{54}=K_{45}=k\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

部材⑦　節点 1 を i 節点 3 を j とすると $\theta=30^\circ$　ただし長さは $\sqrt{3}L$ なので

k’＝k/$\sqrt{3}$

$$K_{11}=K_{33}=k'\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{3}}\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{12}\end{bmatrix}$$

$$K_{13}=K_{31}=k\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12}\end{bmatrix}$$

よって剛性マトリックスKは

$$\begin{bmatrix}Fx1\\Fy1\\Fx2\\Fy2\\Fx3\\Fy3\\Fx4\\Fy4\\Fx5\\Fy5\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}
\frac{3+\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}+1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\
\frac{\sqrt{3}+1}{4} & \frac{9+\sqrt{3}}{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\
-\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{6+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-2\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0\\
-\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1-2\sqrt{3}}{4} & \frac{18+\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\
-\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\
-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U1\\V1\\U2\\V2\\U3\\V3\\U4\\V4\\U5\\V5\end{bmatrix}$$

ここで境界条件(Fx4=100N,Fy4=50N,Fx5=100N,U1＝0,U2＝0,V1＝0,V2=0)
を代入すると

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 50 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-2\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\sqrt{3}}{4} & \frac{18+\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \\ U4 \\ V4 \\ U5 \\ V5 \end{bmatrix}
$$

よって

$$0 = \frac{6+\sqrt{3}}{4}U3 + \frac{1-2\sqrt{3}}{4}V3 - \frac{1}{4}U4 + \frac{\sqrt{3}}{4}V4 - U5 \cdot\cdot\cdot ①$$

$$0 = \frac{1-2\sqrt{3}}{4}U3 + \frac{18+\sqrt{3}}{12}V3 + \frac{\sqrt{3}}{4}U4 - \frac{3}{4}V4 \cdot\cdot\cdot ②$$

$$\frac{100}{k} = -\frac{1}{4}U3 + \frac{\sqrt{3}}{4}V3 + \frac{1}{2}U4 - \frac{1}{4}U5 - \frac{\sqrt{3}}{4}V5 \cdot\cdot\cdot ③$$

$$\frac{50}{k} = \frac{\sqrt{3}}{4}U3 - \frac{3}{4}V3 + \frac{3}{2}V4 - \frac{\sqrt{3}}{4}U5 - \frac{3}{4}V5 \cdot\cdot\cdot ④$$

$$\frac{100}{k} = -U3 - \frac{1}{4}U4 - \frac{\sqrt{3}}{4}V4 + \frac{3}{2}U5 + \frac{\sqrt{3}}{2}V5 \cdot\cdot\cdot ⑤$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}U4 - \frac{3}{4}V4 + \frac{\sqrt{3}}{2}U5 + \frac{3}{2}V5 \cdot\cdot\cdot ⑥$$

次に⑤$-\frac{⑥}{\sqrt{3}}$を計算すると

$$U5=\frac{100}{k}+U3・・・a$$

a を①～⑤まで代入し分母を取り払うと

$$\frac{400}{k}=\left(2+\sqrt{3}\right)U3+(1-2\sqrt{3})V3-U4+\sqrt{3}V4・・・①'$$

$$0=\left(3-6\sqrt{3}\right)U3+(18+\sqrt{3})V3+3\sqrt{3}U4-9V4・・・②'$$

$$\frac{500}{k}=-2U3+\sqrt{3}V3+2U4-\sqrt{3}V5・・・③'$$

$$\frac{200+100\sqrt{3}}{k}=-3V3+6V4-3V5・・・④'$$

$$\frac{200}{k}=2U3-U4-\sqrt{3}V4+2\sqrt{3}V5・・・⑤'$$

次に $3\sqrt{3}$①①$'+$②②$'$をして整理すると

$$V3=\frac{300}{k}-\sqrt{3}U3・・・b$$

b を①’、③’～④’に代入すると

$$\frac{100+600\sqrt{3}}{k}=8U3-U4-\sqrt{3}V4・・・①''$$

$$\frac{500-300\sqrt{3}}{k}=-5U3+2U4-\sqrt{3}V5・・・③''$$

$$\frac{1100+100\sqrt{3}}{k}=3\sqrt{3}U3+6V4-3V5・・・④''$$

ここで①”を変形して

$$\mathrm{U4} = 8\mathrm{U3} + \sqrt{3}\mathrm{V4} - \frac{100 + 600\sqrt{3}}{\mathrm{k}} \quad ・・・\mathrm{c}$$

c を③”と⑤’に代入すると

$$\frac{700 + 900\sqrt{3}}{\mathrm{k}} = 11\mathrm{U3} + 2\sqrt{3}\mathrm{V4} - \sqrt{3}\mathrm{V5} \quad ・・・③'''$$

$$\frac{300 + 600\sqrt{3}}{\mathrm{k}} = 6\mathrm{U3} + 2\sqrt{3}\mathrm{V4} - 2\sqrt{3}\mathrm{V5} \quad ・・・⑤'''$$

ここで③’”を変形して

$$\sqrt{3}\mathrm{V5} = 11\mathrm{U3} + 2\sqrt{3}\mathrm{V4} - \frac{700 + 900\sqrt{3}}{\mathrm{k}} \quad ・・・\mathrm{d}$$

この式を④”に代入し整理するとここで k=EA/L=70×1000×50=3500000

$$\mathrm{U3} = \frac{1600 + 600\sqrt{3}}{8\sqrt{3}\mathrm{k}}$$

$=5.44\times10^{-5}$(m)

さらに⑤’”に d と U3 を代入し整理すると

$$\mathrm{V4} = \frac{550 + 600\sqrt{3}}{\sqrt{3}\mathrm{k}} - \frac{8}{\sqrt{3}}\mathrm{U3}$$

$$= \frac{550 + 600\sqrt{3}}{\sqrt{3}\mathrm{k}} - \frac{1600 + 600\sqrt{3}}{3\mathrm{k}}$$

$=1.08\times10^{-5}$(m)

次に b 式より

$$\mathrm{V3} = \frac{300}{\mathrm{k}} - \sqrt{3}\mathrm{U3}$$

に U3 代入して

$$\mathrm{V3} = \frac{300}{\mathrm{k}} - \frac{1600 + 600\sqrt{3}}{8\mathrm{k}}$$

$=-8.54\times10^{-6}$(m)

次に a 式より

$$U5=\frac{100}{k}+U3$$

に代入して

$$U5=\frac{100}{k}+\frac{1600+600\sqrt{3}}{8\sqrt{3}k}$$

$$=8.30\times10^{-5}(m)$$

以上より V5 は式⑤'''を変形し整理すると

$$V5=\sqrt{3}U3+V4-\frac{300+600\sqrt{3}}{2\sqrt{3}k}$$

$$=\frac{1600+600\sqrt{3}}{8k}+\frac{550+600\sqrt{3}}{\sqrt{3}k}-\frac{1600+600\sqrt{3}}{3k}-\frac{300+600\sqrt{3}}{2\sqrt{3}k}$$

$$=-5.40\times10^{-6}(m)$$

また U4 は a より

$$U4=8U3+\sqrt{3}V4-\frac{100+600\sqrt{3}}{k}$$

$$U4=\frac{550+600\sqrt{3}}{k}-\frac{100+600\sqrt{3}}{k}$$

$$=1.29\times10^{-4}(m)$$

以下にそれぞれの変位をまとめると

$$U3=5.44\times10^{-5}(m)$$

$$V3=-8.54\times10^{-6}(m)$$

$$U4=1.29\times10^{-4}(m)$$

$$V4=1.08\times10^{-5}(m)$$

$$U5=8.30\times10^{-5}(m)$$

$$V5=-5.40\times10^{-6}(m)$$

となる

次に反力を求める

$$Fx1 = k(\frac{3+\sqrt{3}}{4}U1 + \frac{\sqrt{3}+1}{4}V1 - \frac{1}{2}U2 - \frac{\sqrt{3}}{4}U3 - \frac{1}{4}V3 - \frac{1}{4}U5 - \frac{\sqrt{3}}{4}V5)$$
=-139(N)

$$Fy1 = k(\frac{\sqrt{3}+1}{4}U1 + \frac{9+\sqrt{3}}{12}V1 - \frac{1}{4}U3 - \frac{\sqrt{3}}{12}V3 - \frac{\sqrt{3}}{4}U5 - \frac{3}{4}V5)$$
=-155(N)

$$Fx2 = k(-\frac{1}{2}U1 + \frac{3}{4}U2 - \frac{\sqrt{3}}{4}V2 - \frac{1}{4}U3 + \frac{\sqrt{3}}{4}V3)$$
=-61(N)

$$Fy2 = k(-\frac{\sqrt{3}}{4}U2 + \frac{3}{4}V2 + \frac{\sqrt{3}}{4}U3 - \frac{3}{4}V3)$$

=105(N)

次に部材ごとの応力を求める。

部材① θ＝０

$$\sigma^{1} = E\varepsilon = E\frac{(U2-U1)\cos 0 + (V2-V1)\sin 0}{2L}$$

$$70\frac{(0-0)\cos 0 + (0-0)\sin 0}{2} = 0$$

部材② θ＝１２０

$$\sigma^{2} = E\varepsilon = E\frac{(U3-U2)\cos 120 + (V3-V2)\sin 120}{L}$$

$$70\frac{(5.44\times 10^{-5}-0)\cos 120 + (-8.54\times 10^{-6}-0)\sin 120}{1}$$
=-2.42(MPa)

部材③ θ ＝６０

$$\sigma^{3} = E\varepsilon = E\frac{(U5-U1)\cos 60+(V5-V1)\sin 60}{L}$$

$$70\frac{(8.30\times10^{-5}-0)\cos 60+(-5.40\times10^{-6}-0)\sin 60}{1}$$

=2.58(MPa)

部材④ θ ＝０

$$\sigma^{4} = E\varepsilon = E\frac{(U3-U5)\cos 0+(V3-V5)\sin 0}{L}$$

$$70\frac{(5.44\times10^{-5}-8.30\times10^{-5})\cos 0+(-8.54\times10^{-6}--5.40\times10^{-6})\sin 0}{1}$$

=-2.00(MPa)

部材⑤ θ ＝１２０

$$\sigma^{5} = E\varepsilon = E\frac{(U4-U3)\cos 120+(V4-V3)\sin 120}{1}$$

$$70\frac{(1.29\times10^{-4}-5.44\times10^{-5})\cos 120+(1.08\times10^{-5}--8.54\times10^{-6})\sin 120}{1}$$

=-1.44(MPa)

部材⑥ θ ＝６０

$$\sigma^{6} = E\varepsilon = E\frac{(U4-U5)\cos 60+(V4-V5)\sin 60}{L}$$

$$70\frac{(1.29\times10^{-4}-8.30\times10^{-5})\cos 60+(1.08\times10^{-5}--5.40\times10^{-6})\sin 60}{1}$$

=2.59(MPa)

部材⑦ θ ＝３０

$$\sigma^{7} = E\varepsilon = E\frac{(U3 - U1)\cos30 + (V3 - V1)\sin30}{\sqrt{3}L}$$

$$70\,\frac{(5.44 \times 10^{-5} - 0)\cos30 + (-8.54 \times 10^{-6} - 0)\sin30}{\sqrt{3}}$$

$$=1.73(\mathrm{MPa})$$