

1. 薄肉構造曲げの理論

飛翔体構造で用いられる構造の断面は、材料力学で扱っている矩形、円形、三角形などのように単純な形状でなく、また断面に対称軸がない、したがって弾性主軸が未知な場合が多い。ここでは、一般的な形状の断面に曲げモーメントが作用した場合の曲げ応力の求め方を説明するが、材料力学における曲げ応力の求め方を最初に概説する。

1.1 主軸まわりの曲げモーメントによる応力

(1) 曲げモーメントが一方向の場合

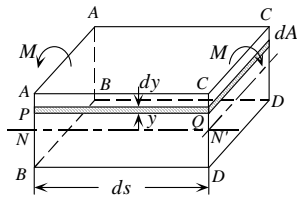


図 1.1 変形前の横断面

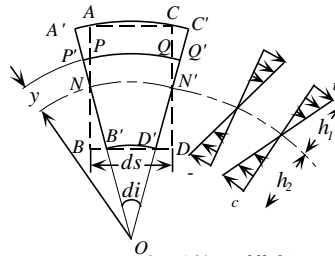


図 1.2 変形後の横断面

図 1.1 に示すように変形前の部材の軸方向に直交していた横断面 A B、C D は曲げモーメント M を受けて変形した後も引き続き直交し、平面を保つ仮定は曲げ変形があまり大きくない場合には充分正しい。

図 1.2 のように、曲げモーメントを受ける前に互いに平行で ds だけ離れていた 2 つの横断面 A B、C D は正の曲げモーメントを受けて A' B'、C' D' のように傾き、部材の下側の面 B' D' は縮み、上側の面 A' C' は伸びる。したがって、その間に伸び縮みしない面 N N' が存在し、その面を中立面(neural surface)、この面と横断面との交線を中立軸(neutral axis)という。変形後の A' B' と C' D' の延長線の交点を O、そこから N N' までの距離 (曲率半径) を ρ 、

<NON = di とする。曲げモーメントを受ける前に中立面より上方に y の距離にあった長さ ds の部分は、曲げモーメントを受けて図 1.2 に示すように P'Q' となるが、この場合のひずみ ε は、定義から

$$\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{(\rho + y)di - \rho di}{\rho di} = \frac{y}{\rho} \quad (1.1)$$

となる。y は上方向を正としているので、ここで正と定義した曲げモーメントにより中立面より下側に圧縮ひずみ(縮む)、上側に引張りひずみ(伸びる)を与え、応力はフックの法則から

$$\sigma = E\varepsilon = Ey/\rho \quad (1.2)$$

となる。応力もひずみと同じように中立軸から下側が圧縮応力、上側が引張り応力となり、中立面上(y=0)では応力がゼロとなる。このように曲げモーメントを受けて、引張りと圧縮の垂直応力が発生するが、この応力を曲げ応力という。

この場合、曲げモーメントのみが作用しているが部材の軸方向に外力は作用していないため、曲げ応力を断面全体に積分した値はゼロとなる。図 1.1 に示した部材横断面の中の微小面積 dA を考えると

$$\int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \quad \int_A y dA = 0 \quad (1.3)$$

の結果が得られた。中立面や中立軸に関して断面内のどこにあるかを今まで示さなかったが、この式は中立軸に関する断面一次モーメントがゼロ、すなわち中立軸が断面の重心(材質が一樣な場合は図心)を通ることを表している。

次に、曲げ応力による軸力の中立軸に関するモーメントの総和は、断面が受ける曲げモーメント M とつりあうので、

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

ここで

$$I = \int_A y^2 dA \quad (1.4)$$

とおくと、

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1.5)$$

が得られる。式(1.4)の I を断面の中立軸に関する**断面二次モーメント**といい、断面の形状寸法が与えられれば計算で求めることができる。式(1.5)において、はりの曲がり具合を表す曲率 $1/\rho$ は EI に反比例し、 EI が大きい程小さくなる。この曲げモーメントに対する部材の変形抵抗を EI 表し、**曲げ剛性** (flexural rigidity) と呼ぶ

式(1.2)と(1.5)から E と ρ を消去すると

$$\sigma = \frac{M}{I} y \quad (1.6)$$

が得られる。この式から部材に作用する曲げモーメント M と部材の断面二次モーメント I を用いて、曲げ応力が求まる。曲げ応力は断面の中立軸から最も

離れた場所で最大となり、上表面 $y = h_1$ で最大引張り応力 σ_t 、下表面 $y = -h_2$ で最大圧縮応力 σ_c

$$\sigma_t = \frac{M}{I} h_1 = \frac{M}{Z_1} \quad \sigma_c = \frac{M}{I} (-h_2) = -\frac{M}{Z_2} \quad (1.7a,b)$$

$$\text{ただし、} \quad Z_1 = I / h_1 \quad Z_2 = I / h_2 \quad (1.8a,b)$$

である。この Z_1 、 Z_2 を断面係数(modulus section)といい、断面二次モーメントと同じように断面の形状寸法が与えられれば、計算で求めることが出来る。この値が大きくなれば、曲げ応力は小さくなる。

(2) 断面二次モーメント

部材の断面形状が与えれば、式(1.4)を用いて断面二次モーメントを計算できるが、ここでは構造部材として良く用いられる長方形断面と円形断面、さらに薄肉断面について、具体的に求めてみる。

1) 長方形断面 図 1.3 に示す幅 b 、高さ h を有する矩形断面の水平方向の中立軸(重心を通る軸) z 軸に関する断面二次モーメントは、 $dA = bdy$ とおくと、式(1.4)を用いて

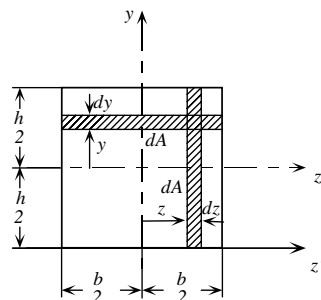


図 1.3 長方形断面

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{1}{12} b h^3 \quad (1.9)$$

で与えられる。式(1.9)は重心を通る中立軸 z 軸に関する値であるが、 z 軸に平

行で長方形断面の下の z' 軸に関して、断面二次モーメントを求めてみる。この場合の積分範囲は $-h/2 \sim h/2$ から $0 \sim h$ に代わり

$$I_{z'} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} bh^3 \quad (1.10)$$

となる。 I_z と $I_{z'}$ の間には、両軸間の距離を $\ell (= h/2)$ 、長方形断面の面積 $A = bh$ とすると

$$I_{z'} = I_z + A\ell^2 = \frac{1}{12} bh^3 + bh(h/2)^2 = \frac{1}{3} bh^3$$

の関係がある。これを平行軸の定理という。

断面の重心を通る鉛直方向の y 軸に関する断面二次モーメントは、図 1.3 で $dA = hdz$ とおくと、次式となる。

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 b dy = \frac{1}{12} hb^3 \quad (1.11)$$

【例題 1.1】

図 1.4 に示す対称溝型材の重心を通る z 軸まわりの断面二次モーメント I_z を求めてみる。基準座標の原点を最下部の中央とし、垂直方向に y 軸、水平方向に z' 軸をと

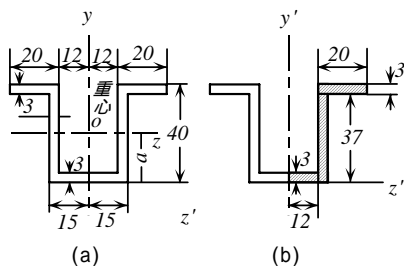


図 1.4 対称溝型材

る。溝型材は左右対称なので y 軸は重心を通る。左右をそれぞれ3つの部分に分けて考える。表 1.1 にしたがって、計算を進めると、 z' 軸から溝型材の図心までの距離

$$a = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{4418}{207} = 21.3(\text{mm})$$

を得る。さらに各部分の重心 y_i と z 軸との距離 $d_i (= y_i - a)$ が求められるので、各部分の z 軸まわりの断面二次モーメントは、平行軸の定理を用いて求めると、最終的に z 軸に関する断面二次モーメントは次ようになる。

$$I_z = 2 \sum (I_{z'i} + A_i d_i^2) = 2 \times 4.548 \times 10^4 = 9.094 \times 10^4 (\text{mm}^4)$$

表 1.1 溝型材の z 軸に関する断面二次モーメント計算表

| | 各部の 断面積 | 各部の 重心の 座標 | 各部の面 積モーメ ント | 主軸 z か らの距離 | 断面右半分部分に関する z 軸ま わりの断面二次モーメントの計 算 | | |
|----------|----------------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|---|---------------------------------|---|
| | | | | | $A_i d_i^2$ (mm^4) | $I_{z'i}$ (mm^4) | $I_{z'i} +$ $A_i d_i^2$ (mm^4) |
| i | A_i (mm^2) | y_i (mm) | $A_i y_i$ | d_i (mm) | $A_i d_i^2$ (mm^4) | $I_{z'i}$ (mm^4) | $I_{z'i} +$ $A_i d_i^2$ (mm^4) |
| | 60 | 38.5 | 2,310 | 17.2 | 17,750 | $20 \times 3^3 / 12$ =45 | 1.780 $\times 10^4$ |
| | 111 | 18.5 | 2,054 | -2.8 | 870 | $3 \times 37^3 / 12$ =12,663 | 1.353 $\times 10^4$ |
| | 36 | 1.5 | 54 | -19.8 | 14,113 | $12 \times 3^3 / 12$ =27 | 1.414 $\times 10^4$ |
| Σ | 207 | | 4,418 | | 32,733 | 12,735 | 4.547 $\times 10^4$ |

次に重心を通る y 軸まわりの断面二次モーメントは、表 1.2 に沿って

表 1.2 溝形材の y 軸に関する断面二次モーメント計算表

| i | 各部の 断面積 (mm^2) | 各部重 心座標 (mm) | 断面の右半分の y 軸まわりの 断面二次モーメントの計算 | | |
|----------|--------------------------|------------------------|-----------------------------------|--|------------------------------------|
| | | | $A_i z_i^2$ (mm^4) | I_{yi} (mm^4) | $I_{yi} + A_i z_i^2$ (mm^4) |
| | 60 | 22 | 2.904×10^4 | $3 \times 20^3/12 = 0.200 \times 10^4$ | 3.104×10^4 |
| | 111 | 13.5 | 2.023×10^4 | $37 \times 3^3/12 = 0.008 \times 10^4$ | 2.031×10^4 |
| | 36 | 6 | 0.130×10^4 | $3 \times 12^3/12 = 0.043 \times 10^4$ | 0.173×10^4 |
| Σ | 207 | | 5.057×10^4 | 0.251×10^4 | 5.308×10^4 |

計算すると上のようになり、断面二次モーメント I_y は次のように求まる。

$$I_y = 2\Sigma(I_{yi} + A_i z_i^2) = 10.62 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

2) 円形断面 図 1.5 に直径 d の円形断面を示す。

円の中心を通り紙面に垂直な軸 p に関する断面二

次モーメントを最初に求めるが、この場合は**極断面**

二次モーメントと特別に呼ぶ。半径座標 r と

$r + dr$ で作る微小面積は $dA = 2\pi r dr$ で、極断面二

次モーメント I_p は

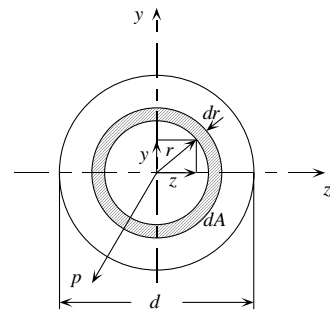


図 1.5 円形断面

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^{d/2} r^2 2\pi r dr = \frac{1}{32} \pi d^4 \quad (1.12)$$

となるが、図 1.5 に示すように $r^2 = z^2 + y^2$ の式から、

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y \quad (1.13)$$

で求めた結果と円形断面の場合は $I_z = I_y$ の関係があるため、結局円形断面の断面二次モーメントは

$$I_z = I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{64} \pi d^4 \quad (1.14)$$

となる。内径 d_1 、外径 d_2 の中空断面の場合は、積分範囲が $d_1/2 \sim d_2/2$ に代わるため、断面二次モーメントは次式となる。

$$I_z = I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{64} \pi (d_2^4 - d_1^4) \quad (1.15)$$

3) 薄肉円筒 内半径を r_1 、外半径を r_2 、厚さを $t = r_2 - r_1$ 、平均半径を $r_m = (r_2 + r_1)/2$ とおくと、式(1.15)は次のようになる。

$$I_z = I_y = \frac{1}{4} \pi (r_2^4 - r_1^4) = \pi r_m^3 t \left(1 + \frac{t^2}{4r_m^2} \right) \quad (1.16)$$

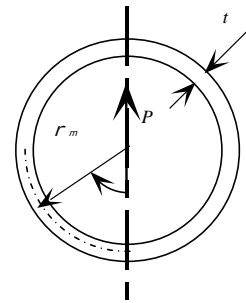
特に $(t/r_m) \ll 1$ の場合、式(1.16)は次のように簡単になる。

$$I_z = I_y = \pi r_m^3 t \quad (1.17)$$

【例題 1.2】

右図の薄肉円形断面（平均半径 r_m , 肉厚 t ）を有する

長さ ℓ の片持ちはりの先端に集中荷重 P が作用した場合、断面の最下点を θ の原点として、断面の中立軸 z までの範囲（ $\theta = 0 \sim 90^\circ$ ）の曲げ応力を求めよ。



長さ ℓ の片持ちはりの先端に集中 P 荷重が作用した場合の最大曲げモーメントは $M_{\max} = -p\ell$,

薄肉円形断面の断面二次モーメントは式(1.17)より、

$I_z = \pi r_m^3 t$ 、断面係数は $Z = I_z / y = (\pi r_m^3 t) / (-r_m \cos \theta)$ で与えられるので、

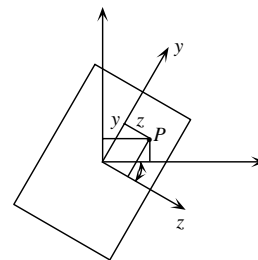
曲げ応力は $\sigma_{\max} = M_{\max} / Z = (p\ell \cos \theta) / (\pi r_m^2 t)$ で与えられる。

4) 図心を通る弾性非主軸に関する断面二次モーメント

図 1.6 において、

y, z 軸は図心を通る弾性主軸（対称軸）、 η, ξ 軸は

同じく図心を通るが任意の直交軸とすると、幾何学的関係から



$$\xi = y \sin \theta + z \cos \theta$$

$$\eta = y \cos \theta - z \sin \theta$$

図 1.6 図心を通る弾性非主軸

を得る。 η, ξ 軸に関する断面二次モーメント

は、主軸に関する断面二次モーメント I_y, I_z （主軸に関する断面相乗モーメント $I_{yz} = 0$ ）を用いて、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} &= \int_A \xi^2 dA = \int_A (y \sin \theta + z \cos \theta)^2 dA \\
 &= \sin^2 \theta \int_A y^2 dA + \cos^2 \theta \int_A z^2 dA + 2 \sin \theta \cos \theta \int_A yz dA \\
 &= I_z \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta
 \end{aligned} \tag{1.18a}$$

$$I_{\xi} = \int_A \eta^2 dA = \int_A (y \cos \theta - z \sin \theta)^2 dA = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta \tag{1.18b}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\eta\xi} &= \int_A \eta\xi dA = \int_A (y \cos \theta - z \sin \theta)(y \sin \theta + z \cos \theta) dA \\
 &= (I_z - I_y) \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{1.18c}$$

図心を通る弾性主軸 y, z 軸に関して断面相乗モーメント I_{yz} はゼロであったが、非主軸の場合の $I_{\xi\eta}$ はゼロにならない。

【例題 1.3】

図 1.7 のような平均半径 $r_m (= 300\text{mm})$ 、板厚 $t (= 1\text{mm})$ からなる円筒が、対称に 8 個の溝型材 (例題 1.1 の形状寸法) で補強され、この補強円筒殻に曲げモーメント $M_z (= 1 \times 10^8 \text{N} \cdot \text{mm})$ が作用した場合の曲げ応力を求めてみる。まず水平方向の中心軸 z 軸に関する断面二次モーメント I_z の計算を行う。

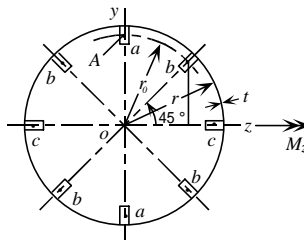


図 1.7 補強円筒

中心から最上および最下の型溝材の図心までの距離 $d = r_0 = r_m - t/2 - (40 - 21.3) = 280.8\text{mm}$ なので、この場合の断面二次モーメント (2つ) は

$$\begin{aligned} I_{z1} &= I_{z0} + Ad^2 = 9.094 \times 10^4 + 2 \times 207 \times 280.8^2 \\ &= 3.273 \times 10^7 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

斜めの型溝材 (4つ) の断面二次モーメントは、 $\theta = \pi/4$ とすると、式(1.18b)より

$$\begin{aligned} I_{z2}' &= I_{z0} \cos^2 \theta + I_{y0} \sin^2 \theta = (I_{z0} + I_{y0})/2 \\ &= (9.094 + 10.62) \times 10^4 / 2 = 9.857 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$Ad^2 = 2 \times 207 \times (r_0 / \sqrt{2})^2 = 4.14 \times 10^2 \times 199^2 = 1.63 \times 10^7$$

$$I_{z2} = I_{z2}' + Ad^2 = 9.857 \times 10^4 + 1.63 \times 10^7 = 1.64 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

左右の型溝材 (2つ) の断面二次モーメント I_{z3} は

$$I_{z3} = I_{y0} = 10.62 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

円筒だけの断面二次モーメントは、式(1.17)を用いて

$$I_{z4} = \pi r_m^3 t = \pi \times 300^3 \times 1 = 8.48 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

となる。全体の断面二次モーメントは、これらの和となる。

$$\begin{aligned} I_z &= 2I_{z1} + 4I_{z2} + 2I_{z3} + I_{z4} \\ &= 2 \times 3.273 \times 10^7 + 4 \times 1.64 \times 10^7 + 2 \times 1.062 \times 10^5 + 8.48 \times 10^7 \\ &= 21.61 \times 10^7 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

最大および最小曲げ応力は上下点に生じ、次の値となる。

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_z}{I_z} r_m = \frac{1 \times 10^8}{21.66 \times 10^7} \times 300 = 138.5 \text{ N/mm}^2 = 138.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x\min} = -138.5 \text{ MPa}$$

(3) 曲げモーメントが二方向の場合

図 1.8 に示すように任意の方向の曲げモーメント M が作用し、それを弾性主軸 y, z まわりに分解して、曲げモーメント M_z, M_y を同時に受ける場合を考える。断面内の任意の点 $p(x, y)$ に生ずる曲げ応力 σ_x だ、二つの曲げモーメントによる応力を加え合わせて

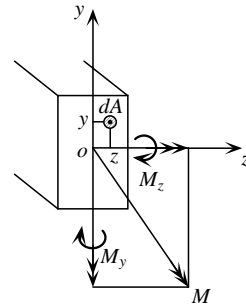


図 1.8 任意方向の曲げモーメント

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (1.19)$$

となる。ここで、 I_z, I_y は、矩形断面の場合は式(1.9)と(1.11)で与えられている。また、 M_z, M_y は 2 重矢印の方向にねじが進む場合の回転方向を正とすると、図 1.8 の y, z 座標系の第 1 象限に引張り応力が生じる。式(1.19)の結果は中実矩形断面のはりにかぎらず、曲げによって断面形状が変化しないように必要十分な補強をはりの軸方向に設けるなら、一般の中空断面のはり(図 1.9)、また一般の張殻構造(semi-monocoque structure)(図 1.10)の応力計算にも用いることができることが実験的に確認されている。さらに断面寸法が軸方向に変化しているテーパはり、はりが分布荷重を受けて軸方向に曲げモーメントが

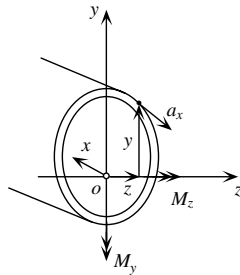


図 1.9 中空断面はり

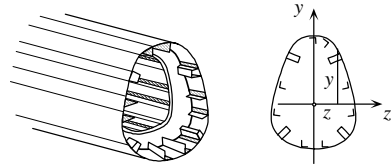


図 1.10 張殻構造

変化する場合、テーパの度合いがあまり大きくなく、断面の変形が起こらなければ、考える断面付近で微小部分 Δx をとれば、その部分では、ほぼ一定の曲げモーメントを受ける一様断面と考えられるので、これらの場合の応力計算にも近似的に式(1.19)を使うことができる。

1.2 弾性非主軸まわりの曲げモーメントによる応力

断面形が対称軸を持つ場合にはこの対称軸が弾性主軸となり、この場合の曲げ応力は前節の方法で計算することができる。航空機などの飛翔体構造要素の断面形重心は求めることはできても、一般に対称軸がなく、したがって弾性主軸が簡単に求まらないため、弾性非主軸まわりの曲げモーメントが作用した場合の曲げ応力の計算式が必要となる。

図 1.11 に示すように任意の形状断面の重心を通るが、弾性主軸でない直交座標を $\eta - \xi$ 軸とする。今までと同じように、曲げモーメントを受けた後も断面は平面を保ち、 x 軸と直交すると仮定する。曲げ応力 σ_x は、 $x\eta, x\xi$ 面内での曲率を $1/r_\eta, 1/r_\xi$ とおき、式(1.2)を参照すると

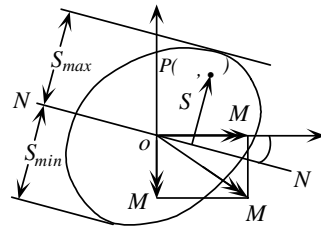


図 1.11 任意形状の断面

$$\sigma_x = \frac{E}{r_\eta} \eta + \frac{E}{r_\xi} \xi \quad (1.20)$$

この曲げ応力から曲げモーメントを計算すると、 η, ξ 軸まわりの曲げモーメント M_η, M_ξ の両方が生じる。

$$M_\eta = \int_A \sigma_x \xi dA = \frac{E}{r_\eta} \int_A \eta \xi dA + \frac{E}{r_\xi} \int_A \xi^2 dA = \frac{E}{r_\eta} I_{\eta\xi} + \frac{E}{r_\xi} I_\eta$$

$$M_\xi = \int_A \sigma_x \eta dA = \frac{E}{r_\eta} \int_A \eta^2 dA + \frac{E}{r_\xi} \int_A \eta \xi dA = \frac{E}{r_\eta} I_\xi + \frac{E}{r_\xi} I_{\eta\xi}$$

ここで、 $I_\eta = \int_A \xi^2 dA$ と $I_\xi = \int_A \eta^2 dA$ は η と ξ に関する断面二次モーメント、 $I_{\eta\xi} = \int_A \eta \xi dA$ は断面相乗モーメントである。この両式から $1/r_\eta$ と $1/r_\xi$ を求めて、式(1.20)に代入すると

$$\sigma_x = \frac{\overline{M}_\xi}{I_\xi} \eta + \frac{\overline{M}_\eta}{I_\eta} \xi \quad (1.21)$$

$$\overline{M}_\xi = \frac{M_\xi - (I_{\eta\xi}/I_\eta)M_\eta}{1 - I_{\eta\xi}^2/(I_\eta I_\xi)} \quad \overline{M}_\eta = \frac{M_\eta - (I_{\eta\xi}/I_\xi)M_\xi}{1 - I_{\eta\xi}^2/(I_\eta I_\xi)} \quad (1.22a,b)$$

任意形状の断面の図心を通る直交座標 $\eta - \xi$ 軸に関する断面二次モーメント、断面相乗モーメントと曲げモーメントが与えられれば、曲げ応力は式(1.21)を用いて求めることができる。また、 η, ξ 軸が弾性主軸（対称軸）の場合

合は、断面相乗モーメント $I_{\eta\xi} = 0$ となり、この場合は $\overline{M}_\xi = M_\xi, \overline{M}_\eta = M_\eta$

となり、式(1.21)と(1.19)は一致する。

次に、任意形状の断面の中立軸を求めてみる。中立軸は曲げ応力を受けない点の軌跡であるから、式(1.21)の $\sigma_x = 0$ から

$$\eta = -\xi \frac{\overline{M}_\eta I_\xi}{\overline{M}_\xi I_\eta} = -\xi \frac{(\overline{M}_\eta / EI_\eta)}{(\overline{M}_\xi / EI_\xi)} \quad (1.23)$$

と書くことができる。図 1.11 で $o-\xi$ 軸から時計方向まわりに中立軸まで計った角度を θ とすると

$$\theta = -\frac{\eta}{\xi} = \tan^{-1} \frac{\overline{M}_\eta I_\xi}{\overline{M}_\xi I_\eta} \rightarrow \tan \theta = \frac{\overline{M}_\eta I_\xi}{\overline{M}_\xi I_\eta} \quad (1.24)$$

と表される。断面の任意の点 $P(\eta, \xi)$ から中立軸までの距離を S は、図 1.11 から

$$S = \eta \cos \theta + \xi \sin \theta = \cos \theta (\eta + \xi \tan \theta) \quad (1.25)$$

一方、式(1.21)は

$$\sigma_x = \frac{\overline{M}_\xi}{I_\xi} \left(\eta + \xi \frac{\overline{M}_\eta I_\xi}{\overline{M}_\xi I_\eta} \right)$$

と書き改めた後、式(1.24)を代入すると

$$\sigma_x = \frac{\overline{M}_\xi}{I_\xi} (\eta + \xi \tan \theta)$$

となる。上式の $(\eta + \xi \tan \theta)$ に式(1.25)の S と $\cos \theta = \left(1 + \left(\frac{\overline{M}_\eta I_\xi}{\overline{M}_\xi I_\eta} \right)^2 \right)^{-0.5}$ を

代入すると、

$$\sigma_x = \frac{\overline{M}_\xi}{I_\xi} \left(1 + \left(\frac{\overline{M}_\eta I_\xi}{\overline{M}_\xi I_\eta} \right)^2 \right)^{0.5} S \quad (1.26)$$

を得る。つまり、「曲げ応力は中立軸からの距離 s に比例する」という断面の主軸に関する曲げの法則が、一般の曲げモーメントと一般座標系にも成り立つ。このことから断面における最大と最小の曲げ応力は、中立軸から最も離れた点で生じる。したがって、図 1.11 で示す S_{\max}, S_{\min} を求めて式(1.26)に代入すれば、最大と最小の曲げ応力を決定できる。

1.3 任意形状断面の弾性主軸

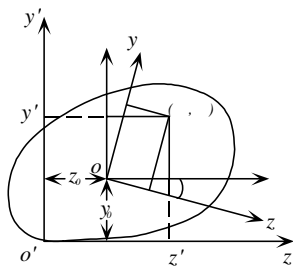


図 1.12 任意形状の断面

図 1.12 に示す任意形状の断面の重心、弾性主軸およびその軸まわりの断面二次モーメントの求め方を、以下に示す。まず始めに、 y', z' 軸は任意にとった直交座標とし、微小面積を dA とすると

$$\text{断面積} : A = \iint dA$$

$$\text{断面一次モーメント} : S_{y'} = \iint z' dA \quad S_{z'} = \iint y' dA$$

$$\text{断面二次モーメント} : I_{y'} = \iint z'^2 dA \quad I_{z'} = \iint y'^2 dA \quad I_{y'z'} = \iint y'z' dA$$

が計算でき、断面の重心は次式で与えられる。

$$y_o = S_{z'} / A \quad z_o = S_{y'} / A \quad (1.27)$$

次に重心を通り y' 軸に平行な η 軸、 z' 軸に平行な ξ 軸まわりの断面二次モーメントは、 $\xi = z' - z_o, \eta = y' - y_o$ より、

$$I_{\eta} = \iint \xi^2 dA = \iint (z' - z_o)^2 dA = I_{y'} - z_o^2 A$$

$$I_{\xi} = \iint \eta^2 dA = \iint (y' - y_o)^2 dA = I_{z'} - y_o^2 A$$

$$I_{\eta\xi} = \iint \eta\xi dA = \iint (y' - y_o)(z' - z_o) dA = I_{y'z'} + y_o z_o A \quad (1.28a \sim c)$$

となる。断面の主軸を求めるために、 η, ξ 軸と θ 傾いた y, z 軸を考え、この軸回りの断面二次モーメントを求める。図 1.12 から

$$y = \eta \cos \theta + \xi \sin \theta \quad z = -\eta \sin \theta + \xi \cos \theta$$

の関係を次式に代入すると

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iint y^2 dA = \iint (\eta \cos \theta + \xi \sin \theta)^2 dA \\
 &= I_\xi \cos^2 \theta + I_\eta \sin^2 \theta + 2I_{\eta\xi} \sin \theta \cos \theta \\
 &= (I_\xi + I_\eta)/2 + (I_\xi - I_\eta) \cos 2\theta/2 + I_{\eta\xi} \sin 2\theta \\
 I_y &= \iint z^2 dA = \iint (-\eta \sin \theta + \xi \cos \theta)^2 dA \\
 &= I_\xi \sin^2 \theta + I_\eta \cos^2 \theta - 2I_{\eta\xi} \sin \theta \cos \theta \\
 &= (I_\xi + I_\eta)/2 + (I_\eta - I_\xi) \cos 2\theta/2 - I_{\eta\xi} \sin 2\theta \\
 I_{yz} &= \iint yz dA = \iint (\eta \cos \theta + \xi \sin \theta)(-\eta \sin \theta + \xi \cos \theta) dA \\
 &= -I_\xi \sin \theta \cos \theta - I_{\eta\xi} \sin^2 \theta + I_{\eta\xi} \cos^2 \theta + I_\eta \sin \theta \cos \theta \\
 &= (I_\eta - I_\xi) \sin 2\theta/2 + I_{\eta\xi} \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

が求まり、 y, z 軸が主軸になるための条件、 $I_{yz} = 0$ から

$$\tan 2\theta = 2I_{\eta\xi} / (I_\xi - I_\eta) \quad (1.29)$$

を得る。これから $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ とした場合の

$$\sin 2\theta = -\frac{I_{\eta\xi}}{2\sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 + I_{\eta\xi}^2}} \quad \cos 2\theta = -\frac{(I_\xi - I_\eta)}{2\sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 + I_{\eta\xi}^2}}$$

を代入すると

$$I_y = \frac{I_\eta + I_\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_\eta - I_\xi}{2}\right)^2 + I_{\eta\xi}^2} \quad (1.30a)$$

$$I_z = \frac{I_\eta + I_\xi}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_\eta - I_\xi}{2}\right)^2 + I_{\eta\xi}^2} \quad (1.30b)$$

を得る。任意形状断面の図心を通る直交座標 η, ξ に関する断面二次モーメント
 のが既知の場合に、その値を用いて式(1.29)から弾性主軸の位置、式(1.30)か
 ら弾性主軸まわりの断面二次モーメントがそれぞれを求まる。

任意形状断面に曲げモーメントが作用した場合に、曲げモーメントを弾性主
 軸まわりの成分 M_y, M_z に分解し、式(1.30)を用いて断面二次モーメントを計
 算した後、式(1.19)を用いれば曲げ応力を求めることができる。

あるいは η, ξ 軸まわりに曲げモーメントを分解し、 η, ξ 軸まわりの断面二次
 モーメントを計算した後、式(1.21)を用いれば、やはり曲げ応力を求めること
 ができる。

【例題 1.4】

図 1.13 に示す翼断面曲げ応力を求める
 問題を考える。

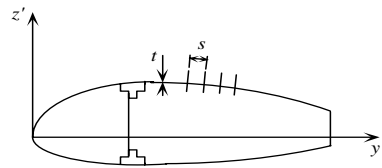


図 1.13 翼断面

翼型を決める基準線に沿って y' 軸、翼
 の前縁を通り y' 軸に垂直に z' 軸をとり

多くの部分に分割して、各部分の断面積を $\Delta A_i (= t_i \Delta s_i)$ と図心位置 (y'_i, z'_i)
 を求め、表 1.3 に従って計算を進めると式(1.27)より図心 (y_o, z_o) が求まり、

次に式(1.28)を用いて ξ, η 軸まわりの断面二次モーメントが求まる。そこで外から与えられた曲げモーメントを ξ, η 軸に分解し、式(1.21)と(1.22)を用いれば曲げ応力を求めることができる。あるいは図 1.13 の弾性主軸の方向と主軸まわりの断面二次モーメントを式(1.29)と(1.30)を用いて求めれば、式(1.19)から曲げ応力を求めることもできる。

表 1.3 翼断面における諸量の計算

| | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|--------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| 1 | y_1' | z_1' | ΔA_1 | $\Delta A_1 y_1'$ | $\Delta A_1 z_1'$ | $\Delta A_1 y_1'^2$ | $\Delta A_1 z_1'^2$ | $\Delta A_1 z_1' y_1'$ |
| 2 | y_2' | z_2' | ΔA_2 | $\Delta A_2 y_2'$ | $\Delta A_2 z_2'$ | $\Delta A_2 y_2'^2$ | $\Delta A_2 z_2'^2$ | $\Delta A_2 z_2' y_2'$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| i | y_i' | z_i' | ΔA_i | $\Delta A_i y_i'$ | $\Delta A_i z_i'$ | $\Delta A_i y_i'^2$ | $\Delta A_i z_i'^2$ | $\Delta A_i z_i' y_i'$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| n | y_n' | z_n' | ΔA_n | $\Delta A_n y_n'$ | $\Delta A_n z_n'$ | $\Delta A_n y_n'^2$ | $\Delta A_n z_n'^2$ | $\Delta A_n z_n' y_n'$ |
| Σ | | | A | $S_{z'}$ | $S_{y'}$ | $I_{z'}$ | $I_{y'}$ | $I_{z'y'}$ |

1.4 はりのたわみ変形

(1) 曲げの基礎式

初め直線状態のはりが曲げモーメントを受けて曲線に変化した場合、この曲線各点の垂直変位をたわみ、たわみ曲線上の接線が、変形前の直線となす角度をたわみ角という。曲率半径 ρ とたわみ w の

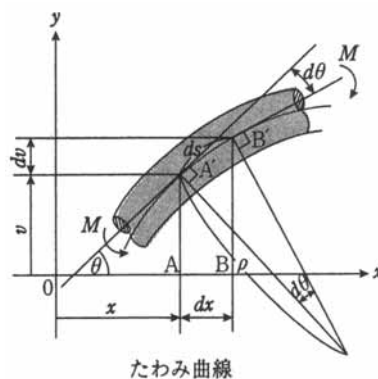


図 1.14 たわみ曲線

関係は、図 1.14 参照して、次式で与えられる。

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2v/dx^2}{\{1+(dv/dx)^2\}^{3/2}} \quad (1.31)$$

はりの弾性域内の曲げでは、ラジアンで表示されたたわみ角 dv/dx は 1 に比べて十分に比べて小さく、式(1.31)で $(dv/dx)^2$ は無視できるとしたら

$$1/\rho = -(d^2v/dx^2) \quad (1.31)$$

となる。式(1.1)を用いると、ひずみは

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = -y \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \quad (1.32)$$

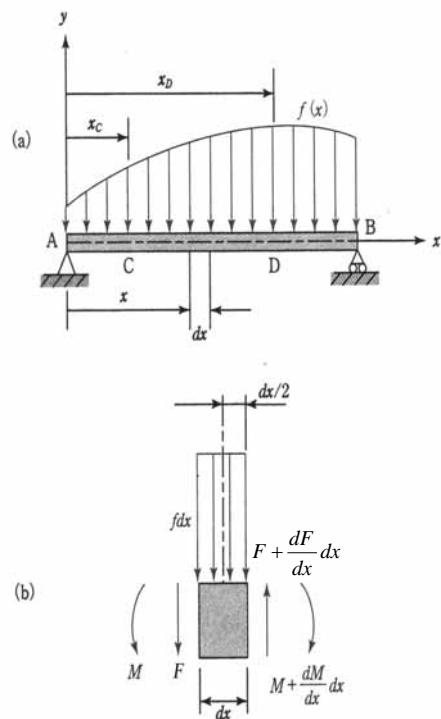
と表せる。式(1.5)の曲げモーメントと曲率の関係式を式(1.31)に代入すると

$$d^2v/dx^2 = -M/(EI) \quad (1.33)$$

が得られる。次に、図 1.15 に分布荷重を受けるはりの微小部分 dx を表すが、 dx 部分の垂直方向の力のつり合いから

$$F + (dF/dx)dx - F - p dx = 0$$

$$dF/dx = f \quad (1.34)$$



分布荷重を受けるはりのせん断力と曲げモーメント

図 1.15 はりの微小部分つり合い

また、右側断面における力のモーメントのつり合いから

$$M + (dM / dx)dx - M - Fdx - f dx \cdot dx / 2 = 0$$

となる。左辺の第 5 項の高次の微少量を省略すると次式を得る。

$$dM / dx = F \quad (1.35)$$

式(1.34)と(1.35)を組み合わせた

$$d^2 M / dx^2 = f \quad (1.36)$$

式を用いて、式(1.33)を x で 2 回微分して EI を両辺にかけると、たわみと分布荷重の関係式を得る。

$$EI(d^4 v / dx^4) = -f \quad (1.37)$$

はりに作用する曲げモーメント M が与えられた場合は式(1.33)を 2 回積分して、2 つの積分定数はたわみ、たわみ角の境界条件で決めれば、たわみ曲線は求まる。分布荷重 f が与えられている場合は、分布荷重による曲げモーメント分布を求めなくても、直接式(1.37)を 4 回積分して、4 つの積分定数ははりの両端の境界条件、たわみ、たわみ角以外にせん断力、曲げモーメントの中で 2 つずつ用いて決定することになる。また、はりの形状、荷重条件が左右対称の場合は、はりの中央でたわみ波形の対称条件 ($dv / dx = 0$) を用いることもできる。

(2) 各境界条件および各荷重条件におけるたわみの最大値

代表的な荷重の形態としては、はりの一点に荷重が作用する極限的な場合の考えた**集中荷重**(concentrated load)、はりの軸方向のある長さに沿って荷重が分布して作用する**分布荷重**(distributed load)、特にはりの全長に沿って荷重が分布して作用する場合や、その分布荷重の大きさが一様な場合、ある関数で変化する場合などが多くの場合が考えられる。

はりの末端の境界条件としては、固定、支持、自由の3通りが考えられるが、これらは次式で表せる。

固定： たわみ $v = 0$ たわみ角 $dv/dx = 0$

支持： たわみ $v = 0$ 曲げモーメント $M = 0 \rightarrow d^2v/dx^2 = 0$

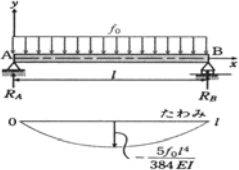
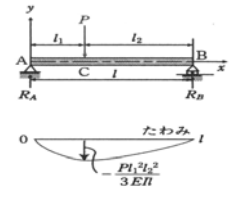
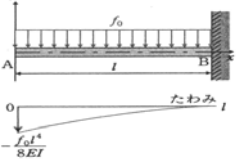
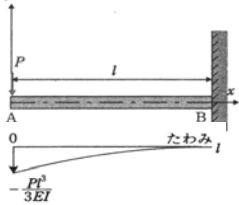
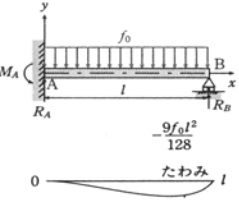
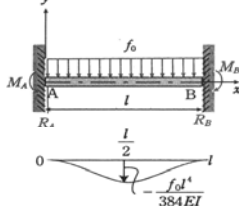
自由： 曲げモーメント $M = 0 \rightarrow d^2v/dx^2 = 0$ 、

$$\text{せん断力 } F = 0 \rightarrow d^3v/dx^3 = 0 \quad (1.38)$$

はりの両端が、固定 - 自由(片もちはり)と支持 - 支持(両端支持はり)の場合は、**静定はり**(statically determinated beam)とよび、力とモーメントのつり合い条件だけで解ける。一方、固定 - 支持と固定 - 固定の場合は、**不静定はり**(statically indeterminated beam)とよび、力とモーメントのつり合い条件だけで解けず、はりの変形条件を導入して解くことになる。

表 1.4 にはりの中央もしくは先端に作用する集中荷重、はりの全長に沿って一様な分布荷重、さらに長さに沿って直線的に変化する分布荷重の場合を負荷の代表的な例として、2通りの静定および不静定境界条件の各組み合わせについて、それぞれの場合のたわみとたわみ角の最大値を示した。実際の場合でこれらの荷重が複数作用する場合は、**重ね合わせ**(superposition)の定理により、それぞれ単独な場合の結果の和として考えればよい。

表 1.4 各境界条件の下で集中、分布荷重を受ける場合のたわみの最大値

| はりの種類と荷重条件 | 曲げモーメントの式 曲げモーメントの最大値 せん断力の最大値 | たわみの最大値 |
|---|---|--|
|  | $M = -\frac{1}{2} f_0 l x + \frac{1}{2} f_0 x^2$ $M_{max} = -\frac{f_0 l^2}{8}$ $F_{max} = -\frac{1}{2} f_0 l$ | $v_{max} = -\frac{5 f_0 l^4}{384 EI}$ |
|  | $M = -\frac{Pl_2}{l} x \quad (0 \leq x \leq l_1)$ $M = -\frac{Pl_1}{l} (l - x) \quad (l_1 \leq x \leq l_2)$ $M_{max} = -\frac{l_1 l_2}{l} P$ $= -\frac{Pl}{4} \quad (l_1 = l_2 = \frac{l}{2})$ $F_{max} = -P$ | $v_{max} = -\frac{Pl_1^2 l_2^2}{3EI}$ $= -\frac{Pl^3}{48EI}$ $(l_1 = l_2 = \frac{l}{2})$ |
|  | $M = \frac{1}{2} f_0 x^2$ $M_{max} = \frac{1}{2} f_0 l^2$ $F_{max} = f_0 l$ | $v_{max} = -\frac{f_0 l^4}{8EI}$ |
|  | $M = Px$ $M_{max} = Pl$ $F_{max} = P$ | $v_{max} = -\frac{Pl^3}{3EI}$ |
|  | $M = f_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{8} l x + \frac{l^2}{8} \right)$ $M_{max} = -\frac{1}{8} f_0 l^2 \quad (x=0)$ $F_{max} = \frac{5}{8} f_0 l$ | $v_{max} = -\frac{f_0 l^4}{184.6EI}$ |
|  | $M = f_0 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} l x + \frac{l^2}{12} \right)$ $M_{max} = \left \frac{f_0 l^2}{12} \right \quad (x=0, l)$ $F_{max} = \left \frac{f_0 l}{2} \right \quad (x=0, l)$ | $v_{max} = -\frac{f_0 l^4}{384EI}$ |