例題１．４の関連問題

51144　高橋朋哉

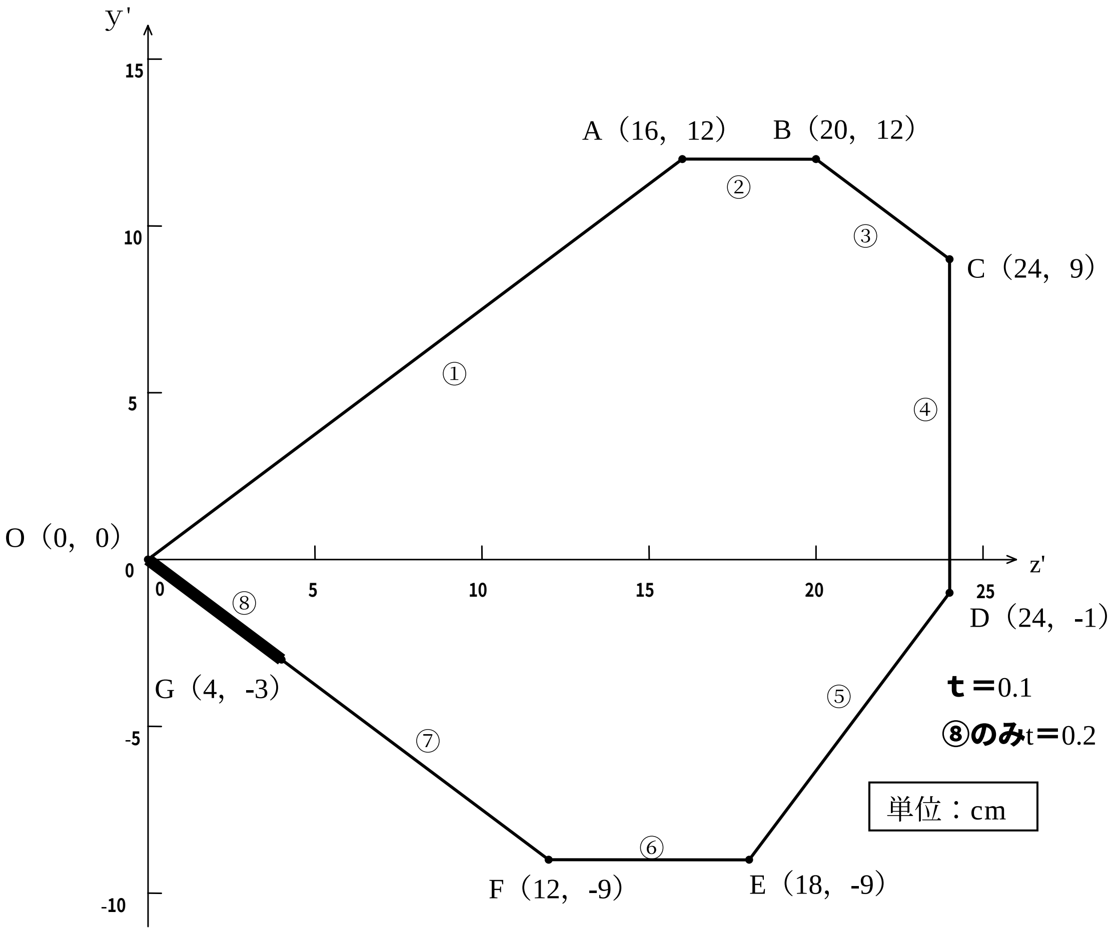

図１ 断面形状

図 1 のような断面の弾性主軸まわりの断面二次モーメントを求める。但し、部材⑧だけの厚さが 2mm で他は 1mm とする。

各部分における断面積ΔA_iを次式から求め，さらに図心位置（y_i', z_i'）を求める。

$$\Delta A_i = t\Delta S_i \qquad (1)$$

そして，各部分の断面一次モーメント$S_{z'}$・$S_{y'}$，断面の重心z_o・y_o，断面二次モーメント

$I_{y'}$・$I_{z'}$・$I_{y'z'}$を次式から求める。

$$S_{y'} = \Delta A_i z_i' \qquad (2a)$$

$S_{z'} = \Delta A_i y_i'$　　（2b）

$y_o = \frac{S_{z'}}{A}$　　（3a）

$z_o = \frac{S_{y'}}{A}$　　（3b）

$I_{y'} = \Delta A_i z_i'^2$　　（4a）

$I_{z'} = \Delta A_i y_i'^2$　　（4b）

$I_{y'z'} = \Delta A_i y_i' z_i'$　　（4c）

各部分の計算結果は表１のようになった。

表１ 計算結果

i	z_i' [cm]	y_i' [cm]	ΔS_i [cm]	ΔA_i [cm^2]	$\Delta A_i z_i'$ [cm^3]	$\Delta A_i y_i'$ [cm^3]	$\Delta A_i z_i'^2$ [cm^4]	$\Delta A_i y_i'^2$ [cm^4]	$\Delta A_i y_i' z_i'$ [cm^4]
1	8	6	20	2	16	12	128	72	96
2	18	12	4	0.4	7.2	4.8	129.6	57.6	86.4
3	22	10.5	5	0.5	11	5.25	242	55.12	115.5
4	24	4	10	1	24	4	576	16	96
5	21	-5	10	1	21	-5	441	25	-105
6	15	-9	6	0.6	9	-5.4	135	48.6	-81
7	8	-6	10	1	8	-6	64	36	-48
8	2	-1.5	5	1	2	-1.5	4	2.25	-3
$\sum$				7.5	98.2	8.15	1719	312.5	156.9
				A	$S_{y'}$	$S_{z'}$	$I_{y'}$	$I_{z'}$	$I_{y'z'}$

また，断面の重心は式（3a・b）より，次のようになった。

$y_o = \frac{8.15}{7.5} = 1.086$ [cm]

$z_o = \frac{98.2}{7.5} = 13.09$ [cm]

次に重心を通り y' 軸に平行な η 軸，z' 軸に平行な ξ 軸まわりの断面二次モーメント I_η ・

I_ξ ・ $I_{\eta\xi}$ は次式となる。

$$I_\eta = I_{y'} - z_o^{\,2} A \qquad (5a)$$

$$I_\xi = I_{z'} - y_o^{\,2} A \qquad (5b)$$

$$I_{\eta\xi} = I_{y'z'} + y_o z_o A \qquad (5c)$$

よって,

$$I_\eta = 1719 - 13.09^2 \times 7.5 = 433.8\,[\mathrm{cm}^4]$$

$$I_\xi = 312.5 - 1.086^2 \times 7.5 = 303.6\,[\mathrm{cm}^4]$$

$$I_{\eta\xi} = 156.9 + 1.086 \times 13.09 \times 7.5 = 263.5\,[\mathrm{cm}^4]$$

y ・ z 軸が弾性主軸となる角度 θ は次式により求めることができる。

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{\eta\xi}}{I_\xi - I_\eta} \qquad (6)$$

よって,

$$\tan 2\theta = \frac{2 \times 263.5}{303.6 - 433.8} = -4.047$$

$$\theta = \frac{\left(\tan^{-1} - 4.047\right)}{2} = -0.6642\,[\mathrm{rad}],\quad -38.08\,[\mathrm{deg}]$$

$-45 \le \theta \le 45$ [deg]において, y ・ z 軸まわりの断面二次モーメントは次式となる。

$$I_y = \frac{I_\eta + I_\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_\eta - I_\xi}{2}\right)^2 + I_{\eta\xi}^{\,2}} \qquad (7a)$$

$$I_z = \frac{I_\eta + I_\xi}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_\eta - I_\xi}{2}\right)^2 + I_{\eta\xi}^{\,2}} \qquad (7b)$$

$$I_{yz} = 0 \qquad (7c)$$

よって,

$$I_y = \frac{433.8+303.6}{2} + \sqrt{\left(\frac{433.8-303.6}{2}\right)^2 + 263.5^2} = 640.1 \quad \therefore 640\,[\mathrm{cm}^4]$$

$$I_z = \frac{433.8+303.6}{2} - \sqrt{\left(\frac{433.8-303.6}{2}\right)^2 + 263.5^2} = 97.30 \quad \therefore 97.3\,[\mathrm{cm}^4]$$

また，曲げ応力σ_xを求める場合は，曲げモーメントを各軸方向に分解し，弾性主軸まわりの断面二次モーメントの値を用いると次式となる。

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \qquad (8)$$