５１１６２番　津藤哲也

[式(3.23)の誘導

　軸圧縮力 P、分布荷重 $p(x)$が作用している場合、はりの微小要素についてのつり合い式を変形後の状態についてかくために、

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{P}{EI}w=0 \qquad (1)$$

の式を x で２回微分すると、

$$\frac{d^4w}{dx^2}+\frac{P}{EI}\frac{d^2w}{dx^2}=0 \qquad (2)$$

となる。さらに、たわみの微分方程式

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M}{EI} \qquad (3)$$

を式(2)に代入すると、

$$\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{P}{EI}M=0 \qquad (4)$$

となる。曲げモーメントの１回微分はせん断力、２回微分は分布荷重を表しており、さらにこの場合には右辺に分布荷重 $p(x)$を加え、$\alpha^2=P/EI$ とおくと、

$$\frac{d^2M}{dx^2}+\alpha^2M=p(x) \qquad (5)$$

となる。ここで、$p(x)$が x について１次式

$$p=p_0+p_1x/l \qquad (6)$$

の場合、

式(5),(6)から

$$M_p=\frac{p_0+p_1x/l}{\alpha^2} \qquad (7)$$

となるので、式(5)の一般解は、

$$M=c_1\sin\alpha x+c_2\cos\alpha x+\frac{p_0+p_1x/l}{\alpha^2} \qquad (8)$$

となる。

　はりの両端で変位がゼロになるように支持し、$x=0$ の端に曲げモーメント M_1が作用する場合を考えると、境界条件は

$$M_1=c_2+\frac{p_0}{\alpha^2}\therefore c_2=M_1-\frac{p_0}{\alpha^2} \qquad (9)$$

となり、また、$x=l$ のとき曲げモーメント M_2が作用する場合を考えると、境界条件は

$$M_2 = c_1 \sin\alpha l + c_2 \cos\alpha l + \frac{p_0 + p_1}{\alpha^2}$$

$$\therefore c_1 = \frac{M_2 - (p_0 + p_1)/\alpha^2 - (M_1 - p_0/\alpha^2)\cos\alpha l}{\sin\alpha l} \qquad (10)$$

となる。

よって、たわみの方程式は式(3)を２回積分して

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}\left[c_1 \sin\alpha x + c_2 \cos\alpha x + \frac{p_0 + p_1 x/l}{\alpha^2}\right]$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{c_1}{\alpha}\cos\alpha x - \frac{c_2}{\alpha}\sin\alpha x + \frac{p_0}{\alpha^2}x + \frac{p_1}{2l\alpha^2}x^2 + A_0\right]$$

$$w = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{c_1}{\alpha^2}\sin\alpha x - \frac{c_2}{\alpha^2}\cos\alpha x + \frac{p_0}{2\alpha^2}x^2 + \frac{p_1}{6l\alpha^2}x^3 + A_0 x + B_0\right] \qquad (11)$$

となる。ここで A_0 と B_0 は積分定数である。境界条件より、x =0 のとき w=0 なので、

$$0 = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{c_1}{\alpha^2}\cdot 0 - \frac{c_2}{\alpha^2}\cdot 1 + \frac{p_0}{2\alpha^2}\cdot 0 + \frac{p_1}{6l\alpha^2}\cdot 0 + A_0\cdot 0 + B_0\right] \qquad (12)$$

$$\therefore B_0 = \frac{c_2}{\alpha^2}$$

となり、$x = l$ のとき w=0 なので、$B_0 = C_2/\alpha^2$ を代入して

$$0 = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{c_1}{\alpha^2}\sin\alpha l - \frac{c_2}{\alpha^2}\cos\alpha l + \frac{p_0}{2\alpha^2}l^2 + \frac{p_1}{6\alpha^2}l^2 + A_0 l + \frac{c_2}{\alpha^2}\right] \qquad (13)$$

$$\therefore A_0 = \frac{c_1}{\alpha^2 l}\sin\alpha l + \frac{c_2}{\alpha^2 l}\cos\alpha l - \frac{p_0 l}{2\alpha^2} - \frac{p_1 l}{6\alpha^2} - \frac{c_2}{\alpha^2 l}$$

となる。ここで、式(11)に式(12),(13)を代入すると

$$w = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{c_1}{\alpha^2}\sin\alpha x - \frac{c_2}{\alpha^2}\cos\alpha x + \frac{p_0}{2\alpha^2}x^2 + \frac{p_1}{6\alpha^2 l}x^3 + \left(\frac{c_1}{\alpha^2 l}\sin\alpha l + \frac{c_2}{\alpha^2 l}\cos\alpha l - \frac{p_0 l}{2\alpha^2} - \frac{p_1 l}{6\alpha^2} - \frac{c_2}{\alpha^2 l}\right)x + \frac{c_2}{\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{\alpha^2}\left\{c_1(\sin\alpha x - \frac{x}{l}\sin\alpha l) + c_2(\cos\alpha x - \frac{x}{l}\cos\alpha l + \frac{x}{l} - 1) + \frac{p_0}{2}(lx - x^2) + \frac{p_1}{6l}(l^2 x - x^3)\right\}\right]$$

$\alpha^2 = P/EI$ を代入すると

$$= \frac{1}{P}\left[c_1(\sin\alpha x - \frac{x}{l}\sin\alpha l) + c_2(\cos\alpha x - \frac{x}{l}\cos\alpha l + \frac{x}{l} - 1) + \frac{p_0}{2}(lx - x^2) + \frac{p_1}{6l}(l^2 x - x^3)\right]$$

となる。教科書の式’3.23)を上記の式に変更する。