機械工学科３年　51049 王経国　解答

式(1.21)誘導ついて

$$\sigma_x = \frac{E}{r_\eta}\eta + \frac{E}{r_\xi}\xi \quad \text{式(1.20)}$$

η, ξ 軸周りの曲げモーメント M_η, M_ξ は、

$$M_\eta = \frac{E}{r_\eta} I_{\eta\xi} + \frac{E}{r_\xi} I_\eta \quad (1)$$

$$M_\xi = \frac{E}{r_\eta} I_\xi + \frac{E}{r_\xi} I_{\eta\xi} \quad (2)$$

式(1)を変形させ、

$$\frac{1}{r_\xi} = (M_\eta - \frac{E}{r_\eta} I_{\eta\xi}) \frac{1}{EI_\eta} \qquad (1a)$$

$$\frac{1}{r_\eta} = (M_\eta - \frac{E}{r_\xi} I_\eta) \frac{1}{EI_{\eta\xi}} \qquad (1b)$$

式(1a)を式(2)に代入する。

$$M_\xi = \frac{E}{r_\eta} I_\xi + (M_\eta - \frac{E}{r_\eta} I_{\eta\xi}) \frac{EI_{\eta\xi}}{EI_\eta}$$

$$M_\xi = \frac{E}{r_\eta} I_\xi + M_\eta \frac{I_{\eta\xi}}{I_\eta} - \frac{E}{r_\eta} \frac{I_{\eta\xi}^2}{I_\eta}$$

$$M_\xi - M_\eta \frac{I_{\eta\xi}}{I_\xi} = \frac{E}{r_\eta} (I_\xi - \frac{I_{\eta\xi}^2}{I_\eta})$$

$$\frac{M_\xi - (I_{\eta\xi}/I_\xi) M_\eta}{E\left(I_\xi - I_{\eta\xi}^2/I_\eta\right)} = \frac{1}{r_\eta}$$

$$\frac{M_\xi - (I_{\eta\xi}/I_\xi) M_\eta}{EI_\xi\left(1 - I_{\eta\xi}^2/I_\eta I_\xi\right)} = \frac{1}{r_\eta}$$

$$\frac{1}{EI_\xi} \frac{M_\xi - (I_{\eta\xi}/I_\xi) M_\eta}{\left(1 - I_{\eta\xi}^2/I_\eta I_\xi\right)} = \frac{1}{r_\eta}$$

ここで、

$$\frac{M_\xi - \left({}^{I_{\eta\xi}}\!/\!{}_{I_\xi}\right) M_\eta}{\left(1 - {}^{I_{\eta\xi}^2}\!/\!{}_{I_\eta I_\xi}\right)}$$ を $\overline{M_\xi}$ とする

$$\frac{1}{r_\eta} = \frac{\overline{M_\xi}}{EI_\xi} \quad (3)$$

次に、式(1b)を式(2)に代入する。

$$M_\xi = (M_\eta - \frac{EI_\eta}{r_\xi})\frac{E}{EI_{\eta\xi}} I_\xi + \frac{EI_{\eta\xi}}{r_\xi}$$

$$M_\xi = \frac{M_\eta}{I_{\eta\xi}} I_\xi - \frac{EI_\eta}{r_\xi I_{\eta\xi}} I_\xi + \frac{EI_{\eta\xi}}{r_\xi}$$

$$\frac{EI_\eta}{r_\xi I_{\eta\xi}} I_\xi - \frac{EI_{\eta\xi}}{r_\xi} = \frac{M_\eta}{I_{\eta\xi}} I_\xi - M_\xi$$

両側に $(I_{\eta\xi}/I_\xi)$ をかけると、

$$\frac{E}{r_\xi} I_\eta - \frac{EI_{\eta\xi}^2}{r_\xi I_\xi} = M_\eta - \frac{M_\xi}{I_\xi} I_{\eta\xi}$$

$$\frac{E}{r_\xi}(I_\eta - \frac{I_{\eta\xi}^2}{I_\xi}) = M_\eta - \frac{M_\xi}{I_\xi} I_{\eta\xi}$$

$$\frac{1}{r_\xi} = \frac{M_\eta - \left({}^{I_{\eta\xi}}\!/\!{}_{I_\eta}\right) M_\xi}{E(I_\eta - {}^{I_{\eta\xi}^2}\!/\!{}_{I_\xi})}$$

$$\frac{1}{r_\xi} = \frac{M_\eta - \left({}^{I_{\eta\xi}}\!/\!{}_{I_\eta}\right) M_\xi}{EI_\eta(1 - {}^{I_{\eta\xi}^2}\!/\!{}_{I_\xi I_\eta})} = \frac{1}{EI_\eta}\frac{M_\eta - \left({}^{I_{\eta\xi}}\!/\!{}_{I_\xi}\right) M_\xi}{(1 - {}^{I_{\eta\xi}^2}\!/\!{}_{I_\xi I_\eta})}$$

ここで、

$$\frac{M_\eta - \left({}^{I_{\eta\xi}}\!/\!{}_{I_\xi}\right) M_\xi}{(1 - {}^{I_{\eta\xi}^2}\!/\!{}_{I_\xi I_\eta})}$$ を $\overline{M_\eta}$ とする。

$$\frac{1}{r_\xi} = \frac{\overline{M_\eta}}{EI_\eta} \quad (4)$$

次に、式(3)と式(4)を式(1.20)に代入し、

$$\sigma_x = \frac{\overline{M_\xi}}{I_\xi}\eta + \frac{\overline{M_\eta}}{I_\eta}\xi \quad (1.21)$$