式 2.18 と 2.19 の誘導

機械工学科　3 年　51044　上野雄太

1.　〈(2.18)式誘導〉

$$u = C_1 \sinh rx + C_2 \cosh rx + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 + \frac{P_0 t x^3}{12D} \qquad (1.1)$$

上式の両辺を x で 2 階微分すると

$$\frac{du}{dx} = rC_1 \cosh rx + rC_2 \sinh rx + 2C_3 x + C_4 + \frac{3P_0 t x^2}{12D}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{dx^2} = r^2 C_1 \sinh rx + r^2 C_2 \cosh rx + 2C_3 + \frac{6P_0 t x}{12D} \qquad (1.2)$$

と変形できるので，式(2.13)

$$E_f t_f \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{G_c t_c}{t}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{2u}{t}\right) = 0$$

において，（1.1）式を代入すると

$$E_f t_f \left(r^2 C_1 \sinh rx + r^2 C_2 \cosh rx + 2C_3 + \frac{6P_0 t x}{12D}\right) + \frac{G_c t_c}{t}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{2u}{t}\right) = 0 \qquad (1.3)$$

となる。（1.1)，（1.3）式において，境界条件により，

$$C_2 + C_5 = 0 \quad (\text{（1.1）：} x = 0,\ u = 0)$$

$$C_1 \sinh rL + C_2 \cosh rL + C_3 L^2 + C_4 L + C_5 + \frac{P_0 t L^3}{12D} = 0 \quad (\text{（1.1）：} x = 0,\ u = 0)$$

$$-C_1 \sinh rL + C_2 \cosh rL + C_3 L^2 - C_4 L + C_5 + \frac{P_0 t L^3}{12D} = 0 \quad (\text{（1.1）：} x = \text{-L},\ u = 0)$$

$$E_f t_f \left(r^2 C_2 + 2C_3\right) = 0 \quad (\text{（1.3）：} x = 0,\ u = \frac{dw}{dx} = 0)$$

整理すると

$$C_2 = -C_5 \qquad (1.4)$$

$$C_1 \sinh rL + C_2 \cosh rL + C_3 L^2 + C_4 L + C_5 + \frac{P_0 t L^3}{12D} = 0 \qquad (1.5)$$

$$-C_1 \sinh rL + C_2 \cosh rL + C_3 L^2 - C_4 L + C_5 + \frac{P_0 t L^3}{12D} = 0 \qquad (1.6)$$

$$r^2 C_2 + 2C_3 = 0 \qquad (1.7)$$

となる。(（1.4）－（1.5）)，(（1.4）＋（1.5）)式より，それぞれ整理すると

$$C_2 \cosh rL + C_3 L^2 + C_5 = 0 \tag{1.8}$$

$$C_1 \sinh rL + C_4 L + \frac{P_0 t L^3}{12D} = 0 \tag{1.9}$$

となるので，（1.4）式を（1.8）式へ代入して整理すると

$$C_2 (\cosh rL - 1) + C_3 L^2 = 0 \tag{1.10}$$

また，((1.5)×L²)，（1.10）式を連立して解くと

$$C_2 = C_3 = 0$$

これと（1.4）式より

$$C_5 = 0$$

となる。

更に，$C_2 = C_3 = C_5 = 0$，境界条件 $x = L$（または $-L$），$u = w = \dfrac{dw}{dx} = 0$ より，（1.3）式は

$$E_f t_f \left(r^2 C_1 \sinh rL + \frac{6 P_0 t L}{12D} \right) = 0 \qquad \therefore C_1 = -\frac{6 P_0 t L}{12 D r^2 \sinh rL} = -\frac{P_0 t L}{12D} \times \frac{6}{r^2} \times \frac{1}{\sinh rL}$$

となり，同様にして $C_2 = C_3 = C_5 = 0$，及び上記結果を（1.6）式に代入すると

$$C_4 = -\frac{1}{L} \left(-\frac{P_0 t L}{12D} \times \frac{6}{r^2 \sinh rL} \right) \sinh rL - \frac{P_0 t L^3}{12D} \times \frac{1}{L} = -\frac{P_0 t L^3}{12D} \left\{ \frac{1}{L} - \frac{1}{L} \times \frac{6}{(rL)^2} \right\}$$

となる。以上結果より，（1.1）式は

$$u = \left(-\frac{P_0 t L}{12D} \times \frac{6}{r^2} \times \frac{1}{\sinh rL} \right) \sinh rx + -\frac{P_0 t L^3}{12D} \left\{ \frac{1}{L} - \frac{1}{L} \times \frac{6}{(rL)^2} \right\} x + \frac{P_0 t x^3}{12D}$$

$$= -\frac{P_0 t L^3}{12D} \left(\frac{6}{(rL)^2} \times \frac{\sinh rx}{\sinh rL} \right) + \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{x}{L} \times \frac{6}{(rL)^2} + \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

$$= -\frac{P_0 t L^3}{12D} \left[\left(\frac{x}{L} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\} \right] + \frac{6}{(rL)^2} \left\{ \frac{\sinh rx}{\sinh rL} - \left(\frac{x}{L} \right) \right\}$$

となる。また，上式において $rL = \lambda$ とおくと

$$u = -\frac{P_0 t L^3}{12D} \left[\left(\frac{x}{L} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\} \right] + \frac{6}{\lambda^2} \left\{ \frac{\sinh rx}{\sinh \lambda} - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \tag{1.11}$$

となる。

2.　〈(2.19)式誘導〉

１の結果より，(1.11）式の両辺を x で２階微分すると

$$\frac{du}{dx}=-\frac{P_0tL^3}{12D}\left[\left(\frac{1}{L}\right)\left\{1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}\right]+\frac{6}{\lambda^2}\left\{\frac{r\cosh rx}{\sinh\lambda}-\left(\frac{1}{L}\right)\right\}$$

$$\therefore\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{P_0tL^3}{12D}\left[-\frac{6x}{L^3}+\frac{6}{\lambda^2}\left(\frac{r^2\sinh rx}{\sinh\lambda}\right)\right]\tag{2.1}$$

となる。下記の式は

$$E_ft_f\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{G_ct_c}{t}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{2u}{t}\right)=0\Leftrightarrow\frac{dw}{dx}=\frac{2u}{t}-\frac{E_ft_ft}{G_ct_c}\times\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dw}{dx}=\frac{2u}{t}-\frac{E_ft_ft^2}{2G_ct_cL^2}\times\left(\frac{2L^2}{t}\right)\times\frac{d^2u}{dx^2}\Leftrightarrow\frac{dw}{dx}=\frac{2u}{t}-\frac{(1+\xi)}{\lambda^2}\times\left(\frac{2L^2}{t}\right)\times\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\text{ただし}\frac{2G_ct_cL^2}{E_ft_ft^2}=\eta,\quad\frac{1}{\eta}=\frac{1+\xi}{\lambda^2}$$

と変形できるので，上式に(1.11)，(2.1)式を代入し，整理すると

$$\frac{dw}{dx}=\frac{P_0L^4}{24}\left[-\frac{4x}{L^2}\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}-\frac{12\xi}{\lambda^2}\left(\frac{2x}{L^2}-\frac{1}{L}\times\frac{2\sinh rx}{\sinh\lambda}\right)\right]$$

積分定数を C' として，上式を x で積分すると

$$w=\frac{P_0L^4}{24}\left[-\left\{\frac{2x^2}{L^2}-\left(\frac{x}{L}\right)^4\right\}-\frac{12\xi}{\lambda^2}\left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{1}{rL}\times\frac{2\cosh rx}{\sinh\lambda}\right)\right]+C'$$

$$=\frac{P_0L^4}{24}\left[-\left\{\frac{2x^2}{L^2}-\left(\frac{x}{L}\right)^4\right\}-\frac{12\xi}{\lambda^2}\left(\frac{x^2}{L^2}-\frac{1}{\lambda}\times\frac{2\cosh\lambda}{\sinh\lambda}\right)\right]+C'\tag{2.2}$$

となるので，境界条件 $x=L$ （または $-L$），$w=0$ を代入して整理すると

$$C'=\frac{P_0L^4}{24}\left[1+\frac{12\xi}{\lambda^2}\left(1-\frac{1}{\lambda}\times\frac{2\cosh\lambda}{\sinh\lambda}\right)\right]$$

となるので，これを(2.2)式へ代入して整理すると

$$w=\frac{P_0L^4}{24}\left[\left\{1-2\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)^4\right\}+\frac{12\xi}{\lambda^2}\times\left\{\frac{2(\cosh rx-\cosh\lambda)}{\lambda\sinh\lambda}+1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}\right]$$

$$w=\frac{P_0L^4}{24}\left[\left\{1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}^2+\frac{12\xi}{\lambda^2}\left\{\frac{2(\cosh rx-\cosh\lambda)}{\lambda\sinh\lambda}+1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}\right] \qquad (2.3)$$

となる。なお，計算の都合上行わなかったが，(1.11)，(2.3)式において$\frac{x}{L}=\varsigma$とおくと，これらの式はそれぞれ

$$u=-\frac{P_0tL^3}{12D}\left[\varsigma\left\{1-(\varsigma)^2\right\}\right]+\frac{6}{\lambda^2}\left\{\frac{\sinh\lambda\varsigma}{\sinh\lambda}-\varsigma\right\}$$

$$w=\frac{P_0L^4}{24}\left[\left\{1-\varsigma^2\right\}^2+\frac{12\xi}{\lambda^2}\left\{\frac{2(\cosh\lambda\varsigma-\cosh\lambda)}{\lambda\sinh\lambda}+\left(1-\varsigma^2\right)\right\}\right]$$

となり，教科書の式(2.18)と(2.19)が誘導できた。