式（3.12)、(3.13）の誘導

51178 番　中山　大輔

1. 式（3.12）の誘導

式（3.10）に式（3.11）を代入すると、

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}+Pw=-P\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (1.1)$$

となる。変形形状 w についてフーリエ級数で表わすと、

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi x}{l}) \qquad (1.2)$$

となる。

式（1.2）を 2 階微分すると、

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}An\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (1.3)$$

となり、式（1.1）に式（1.2）（1.3）を代入すると、

$$-EI\sum_{n=1}^{\infty}An\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+P\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=-P\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (1.4)$$

となり、式（1.4）をまとめると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-EIA_n\frac{n^2\pi^2}{l^2}+PA_n-Pa_n\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=0$$

となり、

$$-EIA_n\frac{n^2\pi^2}{l^2}+PA_n-Pa_n=0 \qquad (1.5)$$

が成り立つ。よって、A_n について解くと、

$$A_n=\frac{Pa_n}{EI(\frac{n^2\pi^2}{l^2})-P}$$ となり、座屈荷重 $P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$ と置き換えると An は、

$$A_n=\frac{P/P_{cr}a_n}{n^2-P/P_{cr}} \qquad (1.6)$$

となり、式（1.6）を式（1.2）に代入すると、

$$w=\frac{P}{P_{cr}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-P/P_{cr}}\sin(\frac{n\pi x}{l})$$

となり、式（3.12）が誘導できた。

2. 式（3.13）の誘導

式（3.10）に $w_o = 0$ 、$e_1 = e_2 = e$ という条件を代入すると、

$$EI\frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = -Pe \qquad (2.1)$$

となり、この微分方程式の一般解を求める。

基本解は、

$$EI\frac{d^2 w_f}{dx^2} + Pw_f = 0 \qquad (2.2)$$

とおく。$w_f = e^{\lambda x}$ とおき、これを 2 階微分すると $\dfrac{d^2 w_f}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ である。これらを式（2.2）に代入すると、

$\left(\lambda^2 + \dfrac{P}{EI}\right)e^{\lambda x} = 0$ 　より、$\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{P}{EI}}i$ となる。よって、$w_f = C'_1 e^{\sqrt{\frac{P}{EI}}xi} + C'_2 e^{-\sqrt{\frac{P}{EI}}xi}$

オイラーの公式より、

$e^{\theta xi} = \cos\theta x + i\sin\theta x$ 　 $e^{-\vartheta xi} = \cos\theta x - i\sin\theta x$ 　であるので基本解 w_f は、

$$w_f = C_1 \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x \qquad (2.3)$$

となる。C_1 と C_2 は積分定数であり、虚数を含む。

特解は、

$$EI\frac{d^2 w_p}{dx^2} + Pw_p = -Pe \qquad (2.4)$$

とおく。$w_p = k$ おき、2 階微分すると、$\dfrac{d^2 w_p}{dx^2} = 0$ である。これらを式（2.4）に代入すると、$Pw_p = -Pe$ であるので、特解は、

$w_p = -e$ 　 (2.5) 　 となる。

一般解は、

$w = w_f + w_p$ であるので、式（2.3）（2.5）より、

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x - e \qquad \left(\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \qquad (2.6)$$

となる。C_1 と C_2 は、
境界条件　$x = 0, l$ で $w = 0$　より、

$$w\big|_{x=0} \qquad 0 = C_2 - e \qquad C_2 = e$$

$$w\big|_{x=l} \qquad 0 = C_1 \sin \alpha l + e \cos \alpha l - e \qquad C_1 = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l}$$

と求まり、式（2.6）に代入して、完全解は、

$$w = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x + e \cos \alpha x - e \qquad (2.7)$$

となる。よって、$l/2$ におけるたわみ w は、

$$w\big|_{x=l/2} = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l} \sin \frac{\alpha l}{2} + e \cos \frac{\alpha l}{2} - e$$ であり、$\beta = \frac{\alpha l}{2}$ とおく。

$$w\big|_{x=l/2} = \frac{e(1 - \cos 2\beta)}{\sin 2\beta} \sin \beta + e \cos \beta - e = \frac{e\left[1 - (2\cos^2 \beta - 1)\right]}{2 \sin \beta \cos \beta} \sin \beta + e \cos \beta - e$$

$$= \frac{e(1 - \cos^2 \beta)}{\cos \beta} + e \cos \beta - e = \frac{e}{\cos \beta} - e = e(\sec \beta - 1)$$

ここで　$\beta = \frac{\alpha l}{2}$　に　$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$　を代入すると、$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} l$　であるので、

$$w\big|_{x=l/2} = e\left[\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) - 1\right] = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{Pl^2}{\pi^2 EI}}\right) - 1\right]$$

となり、座屈荷重 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ と置き換えると、

$$w\big|_{x=l/2} = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right]$$

となり式（3.13）が誘導できた。