第３章　引張り力を受ける真直棒

問題 3.1　E 点で仮想的に切断した断面を考えると、２つの自由体ができる。E 点の左側の自由体に作用している外力はP_1とP_2であり、P_1は左向き、P_2は右向きに作用し、これら外力が E 点に作用する右向きの内力とつりあう。（図 A）したがって、右向きを正とすると

$$-P_1 + P_2 - N_E = -3(\mathrm{kN}) + 0.5(\mathrm{kN}) + N_E = 0$$

$$\therefore N_E = 2.5(\mathrm{kN})$$

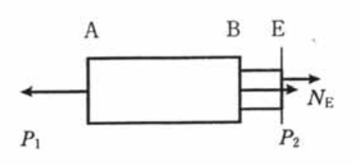


図 A

となる。ついでに E 点の右側の自由物体についても計算しておくと、この場合の内力N_Eは左向きに作用し、外力P_3, P_4は右向きに作用するので（図 B）、

$$-N_E + P_3 + P_4 = -N_E + 1(\mathrm{kN}) + 1.5(\mathrm{kN}) = 0$$

$$\therefore N_E = 2.5(\mathrm{kN})$$

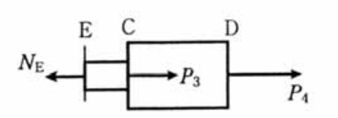


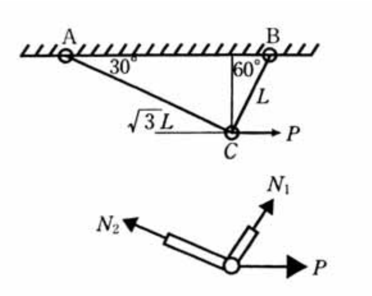
図 B

と計算され、仮想切断面において両自由物体に作用する内力は大きさが等しく、方向は逆向きとなる。

問題 3.2　外力が作用するピン C での力のつり合いを考える。棒に作用する内力、（この場合は軸方向の力なので、軸力とよぶ）をN_1, N_2とすると、水平方向の力のつり合いから

$$-N_2 \cos 30^0 + N_1 \cos 60^0 + P = 0$$

$$-\left(\sqrt{3}/2\right)N_2 + 1/2N_1 + P = 0 \qquad ①$$



垂直方向には外力が作用していないため、内力だけの力のつり合いから

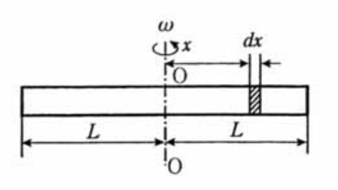
$$N_2 \sin 30^0 + N_1 \sin 60^0 = 0$$

$$N_2/2 + \left(\sqrt{3}/2\right)N_1 = 0 \qquad ②$$

②から$N_2 = -\sqrt{3}N_1$を①に代入して、

$$N_1 = -(1/2)P,\ N_2 = \left(\sqrt{3}/2\right)P$$

問題 3.3　中央(O-O)より、右向きに x の位置で微小長さ dx を考える。棒の断面積と密度を A, ρ とすると、微小部分の体積はと質量は、 $Adx, \rho Adx$ となる。等速円運動の角速度を ω とおくと、 dx 部分の加速度は



$x\omega^2$ となり、 dx 部分の遠心力は $df = x\omega^2 \rho Adx$ で計算される。 x の位置から棒の先端までの遠心力は、dx の部分を x から L まで変化させて足し合わせる、すなわち df について x から L まで積分すれば求まる。

$$F = \int_x^L df = \int_x^L \rho A\omega^2 x dx = (1/2)\rho A\omega^2 \left(L^2 - x^2\right)$$

よって x での応力は

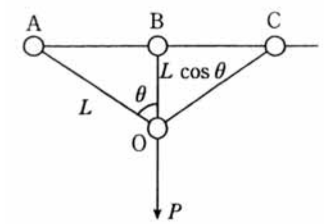
$$\sigma = F / A = (1/2)\rho\omega^2 \left(L^2 - x^2\right)$$

１分間あたりの回転数 $n(\mathrm{rpm})$ の場合、角速度は $\omega = 2\pi n / 60$ で計算されるので、これと $n = 3000(\mathrm{rpm})$ を代入すると、応力は次式となる。

$$\sigma = (1/2)\rho\left[\frac{2\pi \times 3000}{60}\right]^2 \left(L^2 - x^2\right) = 5000\rho\pi^2 \left(L^2 - x^2\right)$$

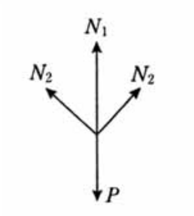
棒の先端 $x = L$ では、引張り応力 $\sigma = 0$ となり、中心 $x = 0$ で応力は最大となる。

問題 3.4　この問題は左右対称なので、部材 OA と OC は同じ役割を果たす。部材 OB の軸力を N_1、OA、OC の軸力を N_2 とすると、O 点における上下の力のつりあいより、



$$N_1 + 2N_2 \cos\theta = P \qquad (1)$$

となる。ただし未知数が２つあり、上の式だけでは N_1、N_2 は求まらない（不静定問題）。左右の力のつりあいを考えてもダメである。



図A

そこで変形を考える。部材 OB の伸びを λ_1 とすると、OA、OC の伸び λ_2 は

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cos\theta \qquad (2)$$

となる（図B参照）。また部材OA、OCの長さが L なので、部材OBの長さは $L\cos\theta$ である。したがって軸力 N_1、N_2 は

$$N_1 = \frac{ES}{L\cos\theta}\lambda_1 \qquad (3)$$

$$N_2 = \frac{ES}{L}\lambda_2 = \frac{ES}{L}\lambda_1\cos\theta \qquad (4)$$

と求められる。式(3)と(4)を式(1)に代入すると

$$\frac{ES}{L}\lambda_1(\frac{1}{\cos\theta} + 2\cos^2\theta) = P \qquad (5)$$

となる。これよりλ_1の解を得る。

$$\lambda_1 = \frac{PL\cos\theta}{ES(1+2\cos^3\theta)} \qquad (6)$$

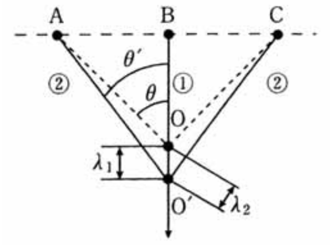


図 B

補足

なぜ左右の力のつりあいを考えても N_1、N_2が求まらないのか？

１行目で“部材 OA と OC は同じ役割を果たす”とし、２行目で“OA、OC の軸力を N_2 とする”としたところで、すでに左右の力のつりあいを考えたことになっている。本来は、OA の軸力を N_2、OC の軸力を N_3 とし、

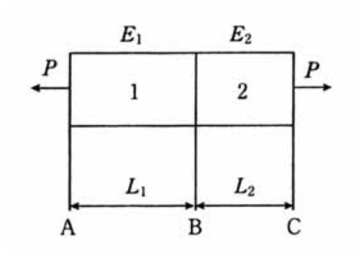
上下：$N_1 + N_2\cos\theta + N_3\cos\theta = P$

左右：$N_2\sin\theta = N_3\sin\theta$

と未知数３個に対して式を２つ立てるところを省略したことになる。

問題 3.5　接合棒の内力 N は軸方向に一定で、外力 P とつり合う。部材１と２に作用する応力σ_1, σ_2は、断面積と内力が等しいので、両部材で同じ結果

$$\sigma_1 = \sigma_2 = P/A$$



を与えるが、材料（ヤング率）が違うので、ひずみは次式

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1 = P/(E_1A), \qquad \varepsilon_2 = \sigma_2/E_2 = P/(E_2A)$$

のようになり、各部の伸びは式(2.9)をから

$$\lambda_1 = \varepsilon_1L_1 = PL_1/(E_1A), \qquad \lambda_2 = \varepsilon_2L_2 = PL_2/(E_2A)$$

で計算され、全体の伸びλは両者の和で与えられる。

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = PL_1/(E_1A) + PL_2/(E_2A)$$