第５章　はりの曲げ（静定はり）

問題 5.1　この場合は、はりの C 点に集中荷重 P_1 と外力モーメント $P_1 d$ が反時計方向に作用している問題として考える。支点 A と B の反力を R_A, R_B とおくと、上下方向の力のつり合いから（上向きを正とする）

$$R_A + R_B - P_1 = 0 \qquad ①$$

を得る。また、時計方向の回転を正とすると、B 点に関して次の力のモーメントの式が得られる。

$$R_A \ell - P_1 \ell_2 - P_1 d = 0 \qquad ②$$

式①と②から、反力 R_A, R_B は次式となる。

$$R_A = \frac{\ell_2 + d}{\ell} P_1, \qquad R_B = \frac{\ell_1 - d}{\ell} P_1$$

問題 5.2　支点 A と B の反力を R_A, R_B を求めるときは、一様分布荷重 f_0 の場合は、その大きさと作用長さをかけて集中荷重とし、長さの中心に作用すると考える。　上下方向の力のつり合いから（上向きを正とする）

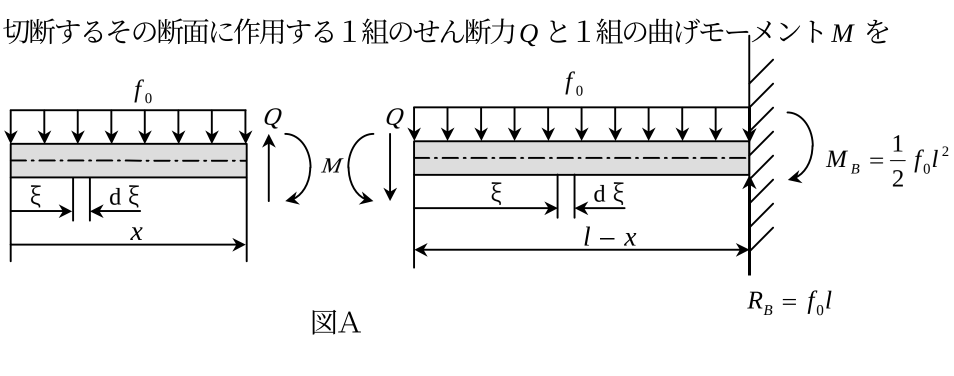
$$R_A + R_B - 5(\text{kN}) - 4(\text{kN/m}) \times 5(\text{m}) - 7(\text{kN}) - 2(\text{kN}) = 0 \qquad ①$$

B 点に関して、時計方向の回転を正とすると、力のモーメントの式

$$R_A \times 5(\text{m}) - 5(\text{kN}) \times 4(\text{m}) - 4(\text{kN/m}) \times 5(\text{m}) \times 2.5(\text{m}) - 7(\text{kN}) \times 1(\text{m}) + 2(\text{kN}) \times 1(\text{m}) = 0 \qquad ②$$

から、 $R_A = 15\ (\text{kN})$ を得る。また、式①から　$R_B = 19\ (\text{kN})$ が求まる。

問題 5.3　はりの内部に作用するせん断力分布（SFD）と曲げモーメント分布（BMD）を求めるため、自由端 A から x の位置 C で図 A に示すように仮想的に切断するその断面に作用する１組のせん断力 Q と１組の曲げモーメント M を



図A

p.77 で定義した正の方向に仮定し、左側部分の力と力のモーメントのつり合いを考える。A点から右向きの補助座標ξ(この補助座標の記号は何でもよく、特に、ξ にする必要はない)の位置に微小長さ $d\xi$ を考えると、この微小長さの荷重は $f_0 d\xi$ となる。ξ を 0 から x まで変化させてたし合わせれば、すなわち積分すれば、仮想的に切断した左側部分全体を考えたことになるので、上下方向の力のつり合いから

$$-\int_0^x f_0 d\xi + Q = 0, \quad Q = f_0 [\xi]_0^x = f_0 x \qquad ①$$

を得る。せん断力は A 点で 0、直線的に変化し、固定端で最大値 $f_0 \ell$ となる(図B)。次に切断点での力のモーメントのつり合いを考える。微小長さ $d\xi$ の部分の力 $f_0 d\xi$ に切断点までの距離 $x-\xi$ をかけると、切断点に関する微小部分の力のモーメントになり、ξ を 0 から x まで変化させて足し合わせれば、すなわち積分すれば、仮想的に切断した左側部分全体の力のモーメントを考えたことになる。時計方向の回転を正として、切断点での曲げモーメントを含めて力のつり合いから、曲げモーメントが計算される。

$$M - \int_0^x f_0 (x-\xi) d\xi = 0, \quad M = f_0 \left[x\xi - \xi^2 / 2 \right]_0^x = f_0 x^2 / 2 \qquad ②$$

曲げモーメントは A 点で 0、2 次式で変化し、固定端で最大値 $f_0 \ell^2 / 2$ となる(図C)。

補足　仮想的に切断した断面の左部分を上の計算例では考えたが、右側の部分を考えても同じ結果になることを示す。切断点に作用するせん断力と曲げモーメントの方向は、先ほどの場合と逆方向に作用する(p.77 の定義)。また、上下方向の力のつり合いからはり全体の力のつり合いから、反力は固定端での反力 R_B だけなので、$R_B = f_0 \ell$ となる。また、力のモーメントのつり合いから固定モーメントとして時計方向に $M_B = f_0 \ell^2 / 2$ が作用する。右側の部分の上下方向の力のつり合いを考えるため、図 A に示す補助座標ξ の位置に微小長さ $d\xi$ を考えると、今度はξ を 0 から $\ell - \xi$ まで積分することになり、

$$-Q - \int_0^{\ell - x} f_0 d\xi + f_0 \ell = 0, \quad Q = f_0 \ell - f_0 [\xi]_0^{\ell - x} = f_0 x \qquad ③$$

力のモーメントのつり合いを切断点で考えると、微小部分の力のモーメントは $f_0 d\xi \cdot \xi$ であるから、曲げモーメントは次式の力のモーメントのつり合いから、

計算できる

$$-M+\int_0^{\ell-x} f_0\xi d\xi+M_B-R_B(\ell-x)=0 \quad ,$$

$$M=\int_0^{\ell-\xi} f_0\xi d\xi+M_B+R_B(\ell-x)=f_0\left[\xi^2/2\right]_0^{\ell-x}+f_0\ell^2/2-f_0\ell(\ell-x)=f_0\ell^2/2 \quad ④$$

この例でも分かるように、仮想的に切断した断面のどちらを計算しても曲げモーメントとせん断力を求めることができるので、計算が簡単な方を選んだ方がよい。

問題 5.4　両端支持はりの場合は、まず両端の支点反力 R_A, R_B から求める。この場合は外力は作用していなくて、C 点に外力モーメントだけが作用しているため、問題 5.1 の P_1 がなく、$P_1 d=M_C$ とおけば求まるが、上下方向の力のつり合い式、

$$R_A+R_B=0,\quad R_B=-R_A \quad ①$$

と B 点に関する力のモーメントのつり合いから

$$R_A\ell+M_C=0,\quad R_A=-M_C/\ell \quad ②$$

を得る。①を②に代入して、$R_B=-R_A=M_C/\ell$ を得る。

次に、SFD と BMD を求める。はりの途中の任意の点に集中荷重やこの例のように外力モーメントが作用している場合は、その作用点前と後で区間を分けて考えなければならない。

$0\le x\le 3\ell/4$ の区間において、x での仮想切断面に作用するせん断力と曲げモーメントを Q, M (正の方向)とおくと(図 A)、上下方向の力のつり合いから

$$R_A+Q=0,\quad Q=-R_A=M_C/\ell \quad ③$$

x での力のモーメントのつり合い条件から

$$R_A x+M=0,\quad M=-R_A x=M_C x/\ell \quad ④$$

③と④から、$0\le x\le 3\ell/4$ の区間ではせん断力は一定値 M_C/ℓ、曲げモーメントは直線的に変化し、$x=3\ell/4$ で $M=3M_a/4$ となる。

$3\ell/4\le x\le \ell$ の区間では x で仮想的に切断した場合（図 B)、右側の方が簡単であるが、あえて左側の方を考える。上下方向の力のつり合いは、区間が変化しても作用している力は変わらないので、③と同じく

$$Q=M_C/\ell \quad ⑤$$

となる。力のモーメントのつり合いは、仮想的切断した x 断面において

$$R_A x+M_C+M=0,\quad M=-R_A x-M_C=-M_C/4 \quad ⑥$$

この区間では、せん断力は前と同じく一定値M_C/ℓとなり、曲げモーメントは$x=3\ell/4$で$M=-M_C/4$、直線的に変化し$x=\ell, M=0$となる。また曲げモーメントは$x=3\ell/4$で$M=3M_C/4$から$-M_C/4$から不連続に変化し、$M=M_C$となる。図CとDにSFDとBMDを示す。

問題 5.5　一様布荷重は$0\le x\le \ell/2$の区間では作用せず、$\ell/2\le x\le \ell$の区間のみに作用しているので、この区間に分けてせん断力と曲げモーメントを求める。
$0\le x\le \ell/2$で仮想的にはりを切断した場合の左側の部分(図 A)の上下方向の力のつり合いと力のモーメントのつり合いを考えると

$$-P_1+Q=0,\quad Q=P_1 \qquad ①$$

$$-P_1x+M=0,\quad M=P_1x \qquad ②$$

$\ell/2\le x\le \ell$では、左端の集中荷重P_1に分布荷重f_0を$\ell/2$からxまでを加えて(図B)、上下方向の力のつり合いを考えると

$$-P_1-\int_{\ell/2}^{x}f_0d\xi+Q=0,\quad Q=P_1+f_0(x-\ell/2) \qquad ③$$

となり、切断点Cでの力のモーメントのつり合いは

$$-P_1x-\int_{\ell/2}^{x}f_0\left(x-\ell/2-\xi\right)d\xi+M=0,\quad M=P_1x+\left[f_0\left(x\xi-\ell\xi/2-\xi^2/2\right)\right]_{\ell/2}^{x}$$

$$M=P_1x+f_0(x^2/2-\ell x+\ell^2/8)=P_1x+\left(f_0/2\right)\left(x-\ell/2\right)^2 \qquad ④$$

となる。SFDとBMDを図Cと図Dにそれぞれ示すが、せん断力は$0\le x\le \ell/2$の範囲で一定で、$\ell/2\le x\le \ell$の範囲ではxと共に直線的増加する。一方、曲げモーメントは$0\le x\le \ell/2$の範囲まで直線的に増加し、$\ell/2\le x$以後は２次曲線で増加する。

補足　上記の問題をはりの先端に集中荷重を受ける片持ちはり(図 E)と中心から固定端まで一様分布荷重を受けるはりの問題(図F)に分けて、重ね合わせの定理を用いて解いてみる。図Eで、はりに先端からxの位置での上下方向の力のつり合いと力のモーメントのつり合いから

$$-P_1+Q=0,\quad Q=P_1 \qquad ⑤$$

$$-P_1x+M=0,\quad M=P_1x \qquad ⑥$$

つぎに、図Fの場合は、問題5.3のせん断力と曲げモーメントの式に、xの代わりに$x-\ell/2$を代入して、次のように求まる。

$Q = f_0(x - \ell/2)$　⑦

$M = f_0(x - \ell/2)^2/2$　⑧

式③は式⑤＋式⑦、式④は式⑥＋式⑧の結果とそれぞれ同じになる

問題 5.6　分布荷重は先端で 0、固定端で f_0 と直線的に変化するので、$f = f_0 x/\ell$ で表せる。図 A に示すように先端から x で仮想的切断し、左側の部分を考える。問題 5.3 と同様にはりの先端から補助座標 ξ を導入し、ξ の位置に微小部分 $d\xi$ の荷重は $fd\xi$ となる。ここで、先ほどの f の式における変数 x を ξ と書き換えると、$fd\xi = f_0\xi d\xi/\ell$ となる。分布荷重の作用範囲 0 から x まで積分すると、分布荷重による全荷重が求まるので、上下方向の力のつり合いから

$$-\int_0^x f_0\xi d\xi/\ell + Q = 0,\quad Q = (f_0/\ell)\left[\xi^2/2\right]_0^x = f_0x^2/(2\ell) \qquad ①$$

が求まる。x の位置(切断点)での力のモーメントを考える場合、$d\xi$ の部分の力のモーメントは $fd\xi(x-\xi) = f_0\xi d\xi(x-\xi)/\ell$ となる。力の場合と同じように分布荷重の作用範囲(0 から x まで)について積分を行うと、分布荷重による力のモーメントが求まるので、時計方向の回転を正とすると

$$-\int_0^x f_0\xi(x-\xi)d\xi/\ell + M = 0,\quad M = (f_0/x)\left[\xi^2 x/2 - \xi^3/3\right]_0^x = \left(f_0x^3/6\ell\right) \qquad ②$$

図 C と図 D に SFD と BMD を示すが、SFD は x の二次曲線、BMD は三次曲線で変化し固定端 $x = \ell$ でそれぞれ最大値となる。

問題 5.7　両端支持で中央に集中荷重が作用する場合の曲げモーメントの最大値は式(5.3)、あるいは式(5.4)において $\ell_1 = \ell/2$ とおくと、

$M_{\max} = -P\ell/4$,　①

曲げ応力の最大値は式(5.18)から、

$\sigma_{\max} = M_{\max}/Z$　②

長方形断面の断面係数 Z は式(5.19)と P.84 の $I_Z = bh^3/12$ と $h_1 = h_2 = h/2$ を用いると

$Z = bh^2/6$　③

式①と③を②に代入し、与題の数値 $\ell = 2$ ㎜, $b = 50$ ㎜, $h = 100$ ㎜, $P = 10$ kN を代入すると、

$$\sigma_{max} = \frac{P\ell/4}{bh^2/6} = \frac{3P\ell}{2bh^2} = \frac{3\times10\times1000(\mathrm{N})\times2(\mathrm{m})}{2\times50\times10^{-3}(\mathrm{m})\times100^2\times10^{-6}(\mathrm{m}^2)} = 60\times10^6(\mathrm{N/mm^2}) = 60(\mathrm{MPa})$$

解を得る。この場合の曲げ応力は厚さ方向下側で正、上側で負となるが、値は等しい。

問題 5.8　最大曲げモーメントは問題 5.3 の解に、$\ell = 2$ ｍ，$f_0 = 5$ kN/ｍ を代入すると

$$M_{max} = f_0\ell^2/2 = 5(\mathrm{kN/m})\times2^2(\mathrm{m}^2)/2 = 10(\mathrm{kN\cdot m}) \qquad ①$$

正方形断面の１辺の長さを a とすると断面係数は

$$Z = a^2/6 \qquad ②$$

となるので、式(5.18)の曲げ応力

$$\sigma_{max} = M_{max}/Z \qquad ③$$

に式①と式②を右辺に、与題の $60(\mathrm{MPa})$ を式③の左辺に代入すると、解を得る。

$$60\times10^6(\mathrm{Pa}) = \frac{10\times10^3(\mathrm{N\cdot m})}{a^2/6}, \quad a = 0.1(\mathrm{m}) = 10(\mathrm{cm})$$

問題 5.9　例題 5.9 最大せん断力 $\tau_{max} = \pm\frac{3f_0\ell}{4bh}$,最大曲げ応力 $\sigma_{max} = \pm\frac{3f_0\ell^2}{4bh^2}$ の式に与題の $b = h = 50\mathrm{mm}, \ell = 2\mathrm{m}, f_0 = 5\mathrm{kN/m}$ をそれぞれ代入すると、解を得る。

$$\tau_{max} = \pm\frac{3f_0\ell}{4bh} = \pm\frac{3\times5\times10^3(\mathrm{N/m})\times2(\mathrm{m})}{4\times50\times10^{-3}(\mathrm{m})\times50\times10^{-3}(\mathrm{m})} = \pm3\times10^6(\mathrm{N/m^2}) = \pm3(\mathrm{MPa})$$

$$\sigma_{max} = \pm\frac{3f_0\ell^2}{4bh^2} = \pm\frac{3\times5\times10^3(\mathrm{N/m})\times2^2(\mathrm{m}^2)}{4\times50\times10^{-3}(\mathrm{m})\times50^2\times10^{-6}(\mathrm{m}^2)} = \pm120\times10^6(\mathrm{N/m^2}) = \pm120(\mathrm{MPa})$$

せん断応力ははりの上下表面で０､最大値ははりの厚さ方向の中央で最大となる。一方、曲げ応力ははりの中立軸上（対称断面の場合は中心軸）で 0,厚さ方向の上下表面上で最大となる。

問題 5.10　長方形断面の場合のせん断応力は、厚さ方向の中央面(中立面)で最大となるが、この場合は接着面で最大せん断応力が生じる。せん断応力の最大値の式は、式(5.27)に $y = 0$ を代入して、次のように計算できる。

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3\times 50\times 10^{3}(\mathrm{N})}{2\times 50\times 10^{-3}(\mathrm{m})\times 100\times 10^{-3}(\mathrm{m})} = 15\times 10^{6}\left(\mathrm{N/m^{2}}\right) = 15(\mathrm{MPa})$$

この場合は、接着強度が15(MPa)以上ないと、はりは中央面でずれる。

問題 5.11　式(5.9) $M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} Q dx$ は、はりの任意の２点、C と D 間の曲げモーメント差は、その間のせん断力を積分すれば求まることを表している。せん断力が一定のため、次のように簡単にせん断力とせん断応力の最大値が求まる。

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} Q dx = Q\left(x_D - x_C\right),$$

$$8.4(\mathrm{kN\cdot m}) - 6.6(\mathrm{kN\cdot m}) = Q\times 0.3(\mathrm{m}), \qquad Q = 6(\mathrm{kN\cdot m})$$

$$, \qquad \tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3\times 60\times 10^{3}(\mathrm{N})}{2\times 15\times 10^{-3}(\mathrm{m})\times 30\times 10^{-3}(\mathrm{m})} = 20\times 10^{6}\left(\mathrm{N/m^{2}}\right) = 20(\mathrm{MPa})$$

問題 5.12　問題 5.7 の場合と同様に、両端支持で中央に集中荷重 P_1 が作用する場合の曲げモーメントの絶対値の最大値は式(5.3)、あるいは式(5.4)において $P = P_1, \ell_1 = \ell / 2$ とおくと、

$$M_{\max} = P_1 \ell / 4, \qquad ①$$

せん断力の最大値は、次式で与えられる。

$$Q_{\max} = P_1 / 2 \qquad ②$$

曲げ応力の最大値は式(5.18)に式①と長方形断面の断面係数 $Z = bh^2 / 6$ を代入してから、

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{P_1 \ell / 4}{bh^2 / 6} = \frac{3P_1 \ell}{2bh^2} \qquad ③$$

長方形断面のせん断応力の最大値 $\tau_{\max}$ は式(5.26)に $Q = P_1 / 2, y = 0$ を代入して

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3P_1}{4bh} \qquad ④$$

となる。式③の $\sigma_{\max}$ と式④の $\tau_{\max}$ の比を求めると

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{3P_1 \ell / \left(2bh^2\right)}{3P_1 / (4bh)} = \frac{2\ell}{h} \qquad ⑤$$

一般に、2ℓ》h であるから、$\sigma_{\max}$》$\tau_{\max}$ となる。