第10章

◎問題10.1

中空正方形の外側，内側の長さをそれぞれa_1, a_2とすると，断面二次半径κと細長比ηは式(10.10)，(10.11) を使うと，$\kappa = \sqrt{\dfrac{{a_1}^2 + {a_2}^2}{12}}$，$\eta = \dfrac{l}{\kappa}$となる．数値を代入し$\kappa = 0.05204$，さらに$l = l6$を代入して$\eta = 115.3$を得る．

◎問題10.2

柱にかかる軸圧縮荷重をPとし，安全率をSとする．座屈荷重P_{cr}は$P_{cr} = SP$であり，式(10.7) から，$P_{cr} = C\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$，柱の両端が固定されている場合は，

$C = 4$，$I = \dfrac{\pi d^4}{64}$

$\therefore SP = C\dfrac{\pi^3 Ed^4}{64l^2}$ よって，$d^4 = \dfrac{64PSl^2}{C\pi^3 E}$, したがって$l = 3\text{m}, P = 6\text{kN}, S = 1.5,$ $E = 206\text{GPa}$のとき，$d = 0.0212\text{m}$

◎問題10.3

座屈応力は式 $\sigma_{cr} = C\dfrac{\pi^2 E}{\eta^2} = C\pi^2 E\left(\dfrac{\kappa}{l}\right)^2$を使う．長方形の幅を$b$，高さを$h$，長方形断面の断面二次係数は2つの軸について計算し，小さいほうκ_{min}を使用する．すなわち，

$\kappa_{min} = \dfrac{b}{2\;\;3}$をとる．$P_{cr} = 92.0\text{kN}$，$\eta = \dfrac{l}{\kappa} = 139$ となる．

◎問題10.4

中実，中空円柱の物理量にそれぞれ添字を以下のようにつける．

中実 s (solid) E_s，I_s，l_s，P_s，C_s

中空 h (hollow) E_h，I_h，l_h，P_h，C_h

座屈荷重は式(10.7) より，$P_s = \dfrac{C_s \pi^2 E_s I_s}{l_s^2}$，$P_h = \dfrac{C_h \pi^2 E_h I_h}{{l_h}^2}$

両者の比をとると $\dfrac{P_s}{P_h}=\dfrac{C_s}{C_h}\dfrac{E_s}{E_h}\dfrac{I_s}{I_h}\dfrac{l_h^2}{l_s^2}$，条件から $C_s=C_h$，$E_s=E_h$，$l_s=l_h$

．$\therefore\dfrac{P_s}{P_h}=\dfrac{I_s}{I_h}$ 、 $I_s=\dfrac{\pi d^4}{64}$，$I_h=\dfrac{\pi\,(d_2{}^4-d_1{}^4)}{64}$ そこで $\dfrac{d_2}{d_1}=\alpha$ とおき，断面積が等しい条件から，$\dfrac{P_s}{P_h}=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$ を得る．次に，$\alpha=2$ を代入し，$\dfrac{P_s}{P_h}=0.6$ となる．

◎問題10.5

軸対称性から，z軸のみについて考えると $\kappa_z{}^2=\dfrac{d^2}{16}$ すなわち，$\kappa_z=\dfrac{d}{4}$ となり，z軸上の点P $0,\ -\dfrac{d}{2}$ を通るから第1象限における方程式は，$\dfrac{e_x}{\kappa_x{}^2}x+\dfrac{e_z}{\kappa_z{}^2}z+1=0$，この方程式は点Pを通るから，$x$，$z$ に代入して，$\dfrac{16z}{d^2}\left(-\dfrac{d}{2}\right)+1=0$

$\therefore\quad z=\dfrac{d}{8}$ 　　　　このことから円形断面の核は，直径 $\dfrac{d}{4}$ の円である．

◎問題10.6

任意断面 x における M は，$M=\left(Pv+\dfrac{f_0 l}{2}x-\dfrac{f_0}{2}x^2\right)$，したがってはりの微分方程式から，$EI\dfrac{d^2v}{dx^2}=-\left(Pv+\dfrac{f_0 l}{2}x-\dfrac{f_0}{2}x^2\right)$，$\dfrac{P}{EI}=\alpha^2$，とおくと

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v+\frac{\alpha^2}{P}\left\{\frac{f_0}{2}(lx-x^2)\right\}$$

この一般解は，

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\frac{1}{P}\left(\frac{f_0x^2}{2}-\frac{f_0 l}{2}x-\frac{f_0EI}{P}\right)$$

境界条件から，$x=0$ および $x=l$ で，$v=0$ であるから，

となり，$v=\dfrac{f_0EI}{P^2}\dfrac{1-\cos\alpha l}{\sin\alpha l}\sin\alpha x-\dfrac{f_0EI}{P^2}(1-\cos\alpha x)-\dfrac{f_0x}{2P}(l-x)$

$x=\dfrac{l}{2}$ を代入し

$v = \dfrac{f_0 EI}{P^2}\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha l}{2}} - 1 - \dfrac{Pl^2}{8EI}\right)$，上式で$\cos\dfrac{\alpha l}{2} = 0$または，$\dfrac{\alpha l}{2} = \dfrac{\pi}{2}$のとき，

$\delta \to \infty$となる．よって，$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$であり，両端支持の座屈荷重の式である．

このことから，座屈荷重には分布荷重の影響がないことがわかる．

◎問題10.7

図10.16に示す系を満足する微分方程式は，$EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = M_0 + R_0 x - Pv$，

$\dfrac{P}{EI} = \alpha^2$とおくと，一般解は$v = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \dfrac{M_0}{P} + \dfrac{R_0}{P}x$

境界条件，$x = 0$で$v = 0$，$M = 0$，$x = l$で$M = 0$と$v = \dfrac{R_0}{k}$であるから，一般解に代入し，次式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & 1 & 1 - \dfrac{P}{k} \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

が得られる．上式から$\sin\alpha l\left(1 - \dfrac{P}{k}\right) = 0$，したがって$P = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$または$P = kl$

このことから，両端回転端の境界条件を持つ柱の座屈問題と同一であることがわかる．

◎問題10.8

図10.17において，BDは引張り力T'を受ける．一方，AB，BC，CD，DAは同じ圧縮力Tを受ける．したがって，ABのみ力のつり合いを考えると，

$$P = T\cos\theta + T\cos\theta = 2T\cos\theta = 2T\cos 45^\circ = \sqrt{2}\,T$$

$\therefore\ T = \dfrac{P}{\sqrt{2}}$，座屈荷重は$T = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$，となり，$P = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi^2 EI}{l^2}$となる．

◎問題10.9

上端のたわみをδとすると，2本のはりの微分方程式が得られる．

$EI_1\dfrac{d^2v_1}{dx^2}=p(\delta-v_1)$，$EI_2\dfrac{d^2v_2}{dx^2}=p(\delta-v_2)$，$k_1{}^2=\dfrac{P}{EI_1}$，$k_2{}^2=\dfrac{P}{EI_2}$とおき，

境界条件から積分定数A，Bは　$A=-B\tan k_1l$

$$B=\frac{\delta\cos k_2l_2\cos k_1l_1}{\sin k_1l}$$

となり，$x=l_2$で連続であることから，

$$\delta k_2\sin k_2l_2=-Ak_1\sin k_1l_2+Bk_1\cos k_1l$$

積分定数A，Bを代入すると$\tan k_1l_1\tan k_2l_2=\dfrac{k_1}{k_2}$

◎問題10.10

不安定時のA，B点の変位をそれぞれδ_A，δ_Bとする．棒が受ける力はそれぞれ$P_A=k_A\delta_A$，$P_B=k_B\delta_B$，力のつり合いから$P_A=P_B$　$\therefore k_A\delta_A=k_B\delta_B$

モーメントのつり合いから，$P_Al-P(\delta_A+\delta_B)=0$．これらの式から次式が求まる．

$$P=\frac{k_Ak_B}{k_A+k_B}$$