第11章

◎問題11.1

円周応力σ_1および軸引張応力σ_2を式(11.3)および式(11.6)を求めると

$$\sigma_1 = \frac{pd}{2t} = \frac{8 \times 10^5 \times 0.5}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 40 \ (\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{pd}{4t} = 20 \ (\text{MPa})$$

次に円周ひずみをε_1とすると，平面応力におけるひずみと応力の関係式式(11.8)より

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu\sigma_2}{E} = \frac{40 - 0.3 \times 20}{206 \times 10^3} = 165 \times 10^{-6}$$

円筒の内半径rの増加δr_1と円周ひずみε_1との間には次式の関係がある．

$$\varepsilon_1=\frac{2\pi(r_1+\delta r_1)-2\pi r_1}{2\pi r_1}=\frac{\delta r_1}{r_1}$$

したがって内半径の増加は

$$\delta r_1=r_1\varepsilon_1=250\times 165\times 10^{-6}=0.04125\ \text{(mm)}$$

内径の増加は0.0825（mm）となる．

◎問題11.2

円周応力および軸引張応力は式(11.3）および式(11.6）より

$$\sigma_1=\frac{pd}{2t}=\frac{6\times 10^5\times 0.2}{2\times 2\times 10^{-3}}=30\ \text{(MPa)}$$

$$\sigma_2=\frac{pd}{4t}=15\ \text{(MPa)}$$

式(11.8）より円周ひずみおよび軸ひずみを求めると

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1-\nu\sigma_2}{E}=\frac{30-0.3\times 15}{205\times 10^3}=124\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\sigma_2-\nu\sigma_1}{E}=\frac{15-0.3\times 30}{205\times 10^3}=29.3\times 10^{-6}$$

円周ひずみと軸ひずみは主ひずみであるので，この面のせん断ひずみは0である．したがって円筒の軸方向に対して30°方向の縦ひずみε_{30}は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{30}&=\frac{1}{2}(\varepsilon_2+\varepsilon_1)+\frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cos 2\psi\\&=\frac{1}{2}(29.3+124)\times 10^{-6}+\frac{1}{2}(29.3-124)\times 10^{-6}\cos 60^\circ\\&=53.0\times 10^{-6}\end{aligned}$$

◎問題11.3

式(11.21）より

$$\sigma_r=\frac{p_1r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_t=\frac{p_1r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right)$$

上式$r_1=5$cm，$r_2=5+6=11$cm，$p_1=8$MPa，$r=8$cmを代入して

$$\sigma_r = \frac{8\times10^6\times0.05^2}{0.11^2-0.05^2}\left(1-\frac{0.11^2}{0.08^2}\right) = -1.86\ \text{(MPa)}$$

$$\sigma_t = \frac{8\times10^6\times0.05^2}{0.11^2-0.05^2}\left(1+\frac{0.11^2}{0.08^2}\right) = 6.02\ \text{(MPa)}$$

◎問題11.4

式(11.23) より

$$u_{r=r_1} = \frac{p_1\left[(1+\nu)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2+(1-\nu)\right]}{\left[E\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-1\right]}r_1$$

$$= \frac{8\times10^6\left[(1+0.3)(0.11/0.05)^2+(1-0.3)\right]}{206\times10^9\left[(0.11/0.05)^2-1\right]}\times0.05$$

$$= 3.54\times10^{-6}\ \text{(m)} = 3.53\ (\mu\text{m})$$

$$u_{r=r_2} = \frac{2p_1}{\left[E\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-1\right]}r_2$$

$$= \frac{2\times8\times10^6}{206\times10^9\left[(0.11/0.05)^2-1\right]}\times0.11$$

$$= 2.22\times10^{-6}\ \text{(m)} = 2.23\ (\mu\text{m})$$

◎問題11.5

式(11.16) より

$$\sigma_r = \frac{p_1r_1^2-p_2r_2^2}{r_2^2-r_1^2} - \frac{r_1^2r_2^2(p_1-p_2)}{r^2(r_2^2-r_1^2)}$$

$$\sigma_t = \frac{p_1r_1^2-p_2r_22}{r_2^2-r_1^2} + \frac{r_1^2r_2^2(p_1-p_2)}{r^2(r_2^2-r_1^2)}$$

上式に$r_1 = 2\text{cm}$，$r_2 = 11\text{cm}$，$p_1 = 4\text{MPa}$，$r = 8\ \text{cm}$を代入して

$$\sigma_r = \frac{8\times10^6\times0.05^2-4\times10^6\times0.11^2}{0.11^2-0.05^2} - \frac{0.05^2\times0.11^2\times(8-4)\times10^6}{0.08^2\times(0.11^2-0.05^2)}$$

$$= -4.9277\ \text{(MPa)}$$

$$\sigma_t = \frac{8\times10^6\times0.05^2-4\times10^6\times0.11^2}{0.11^2-0.05^2} + \frac{0.05^2\times0.11^2\times(8-4)\times10^6}{0.08^2\times(0.11^2-0.05^2)}$$

$= -0.9889$ (MPa)

◎問題11.6

式(11.33) より焼ばめしろは次式で与えられる．

$$\delta' = \frac{r_0 p_0}{E}\left[\frac{r_2^2 + r_0^2}{r_2^2 - r_0^2} + \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2}\right]$$

上式に$p_0 = 20$MPa，$r_1 = 10$cm，$r_0 = 15$cm，$r_2 = 20$cm，$E = 205$GPaを代入して

$$\delta' = \frac{15 \times 20 \times 10^6}{205 \times 10^9}\left[\frac{0.2^2 + 0.15^2}{0.2^2 - 0.15^2} + \frac{0.15^2 + 0.1^2}{0.15^2 - 0.1^2}\right]$$

$$= 9.03 \times 10^{-3} \text{ (m)} = 9.03 \text{ (mm)}$$

◎問題11.7

円周および外筒の内側における円周応力はそれぞれ，式(11.29) により与えられる．

$$\sigma_{ti} = p\frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1} - \frac{2p_0}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

$$\sigma_{t0} = p\frac{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1} + p_0\frac{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 1}$$

上式に$p_0 = 20$MPa，$p = 100$MPa，$r_1 = 10$cm，$r_0 = 12.5$cm，$r_2 = 15$cmを代入すればよい．また$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 2.25$，$\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 = 1.44$，$\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 = 0.64$

$$\sigma_{ti} = 100 \times 10^6 \times \frac{2.25 + 1}{2.25 - 1} - \frac{2 \times 20 \times 10^6}{1 - 0.64}$$

$$= 0.149 \text{ (GPa)}$$

$$\sigma_{t0} = 100 \times 10^6 \times \frac{1.44 + 1}{2.25 - 1} + 20 \times 10^6 \times \frac{1.44 + 1}{1.44 - 1}$$

$$= 0.301 \text{ (GPa)}$$

◎問題11.8

最大主応力

中実円板　$\sigma_{t\,max} = \dfrac{1}{8}(3+\nu)\,\rho r^2\omega^2 \cdots\cdots\cdots$ (1)

$\begin{cases} \nu & ：ポアソン比 \\ r^2 & ：外径 \\ \omega & ：角速度 \\ \rho & ：密度 \end{cases}$

中空円板　$\sigma_{t\,max} = \dfrac{1}{4} \times (3+\nu) + (1-\nu)\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 \ \rho r_2{}^2\omega^2 \cdots\cdots$ (2)

$\begin{cases} r_1 & ：内径 \\ r_2 & ：外径 \end{cases}$

以後，外径はすべて等しく，r_0とする．

(1) 薄肉円環　最大主応力を$\sigma_{t\,max\,1}$，角速度をω_1とする．

$\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 \fallingdotseq 1$とすると，式 (2) より

$$\sigma_{t\,max\,1} = \frac{1}{4}\left[(3+\nu)+(1-\nu)\right]\rho r_0{}^2\omega_1{}^2$$

(2) 中実円板　最大主応力を$\sigma_{t\,max\,2}$，角速度をω_2とする．

式 (1) より，

$$\sigma_{t\,max\,2} = \frac{1}{8}(3+\nu)\,\rho r_0{}^2\omega_2{}^2$$

(3) 小穴のある円板　最大主応力を$\sigma_{t\,max\,3}$，角速度をω_3とする．

$\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 \fallingdotseq 0$　とすると，式 (2) より

$$\sigma_{t\,max\,3} = \frac{1}{4}(3+\nu)\,\rho r_0{}^2\omega_3{}^2$$

すべて等しい最大主応力が発生することから，

$$\sigma_{t\,max\,1} = \sigma_{t\,max\,2} = \sigma_{t\,max\,3}$$

これより，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{8}{3+\nu}}\,\omega_1, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{8}{2(3+\nu)}}\,\omega$$

ポアソン比を0.3とすると，

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1 : 1.56 : 1.10$$

周速度をvとすると，　$v = r\omega$　より，

$$v_1 : v_2 : v_3 = 1 : 1.56 : 1.10$$

◎問題11.9

内圧p_1を受ける厚肉球殻の円周応力および半径応力は式(11.43)により与えられる．

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{r_2^3}{2r^3}+1\right), \quad \sigma_r = -\frac{p_1 r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left(\frac{r_2^3}{r^3}-1\right)$$

この場合3軸応力状態となり，その3主応力はσ_t, σ_t, σ_rに対応する．球殻材料許容引張応力をσ_aとすれば，

$$\sigma_a = \frac{\sigma_e}{S}$$

最大せん断応力τ_{max}は$r = r_1$の$\frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_r)$となる．

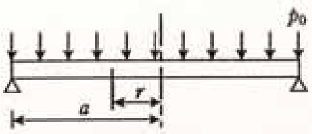
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_r)_{r=r_1} = \frac{\left[3\ \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 p1\right]}{\left[4\ \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 1\right]}$$

したがって最大せん断応力による限界の内圧は

$$\frac{3\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 p_1}{4\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 1\right]} = \frac{\sigma_a}{2} = \frac{\sigma_e}{2S}$$

$$\therefore\ p_1 = \frac{2\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 1\right]\ \sigma_e}{3\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 S}$$

◎問題11.10



半径aの円板（周縁支持）に等分布荷重（圧力p_0）が作用した場合の応力を求める．

曲げモーメントM（M_rまたはM_θ）が作用する場合，その点での最大曲げ応力（$(\sigma_r)_{max}$および$(\sigma_\theta)_{max}$）は

$$(\sigma_r)_{max} = \frac{6M_r}{t^2}$$

$$(\sigma_\theta)_{max} = \frac{6M_\theta}{t^2}$$

である．ここで，$M_r > 0$，$M_\theta > 0$とする．したがって，円板中の曲げ応力の最大は，各曲げモーメントが最大の位置で生じる．p.229の公式より

$$(M_r)_{max} = \frac{(3+\nu)p_0}{16}a^2 = (M_t)_{max}$$

となる（ここで，$r=0$）．最大曲げ応力は円板中心裏側表面で生じる．ここでは面内（円板表面に平行）のせん断応力も0となる（対称性から）．したがって，$(\sigma_r)_{max}$，$(\sigma_\theta)_{max}$はいずれも最大主応力である．円板の破壊が最大主応力により持たらされる（最大主応力説に従う）とすれば

$(\sigma_r)_{max}$（または，$(\sigma_\theta)_{max}$）$\leqq \sigma_a$（許容応力）

を満足する$(p_0)_{max}$を求めれば設問の解答となる．

$$\sigma_1 = (\sigma_r)_{max} = \frac{6(M_r)_{max}}{t^2} = \frac{6}{t^2}\cdot\frac{(3+\nu)(p_0)_{max}}{16}a^2 < \sigma_a$$

$$\therefore \quad (p_0)_{max} \leqq \frac{t^2}{6}\cdot\frac{16}{(3+\nu)}\cdot\frac{\sigma_a}{a^2} \fallingdotseq 19.4 \ (\mathrm{N/mm^2})$$

ここで，鋼のポアソン比νは0.3とした．

◎問題11.11

鉄管に取り付けられた軟鋼製の蓋を，周辺固定された円板と考える．また，その破壊は最大主応力によってもたらされると考える．

曲げモーメントM（M_rまたはM_θ）が作用する地点まで最大曲げ応力は次式で与えられる．

$$(\sigma_r)_{max} = \frac{6M_r}{t^2} \quad \text{（半径方向の垂直応力の最大）}$$

$$(\sigma_\theta)_{max} = \frac{6M_\theta}{t^2} \quad \text{（円周方向の垂直応力の最大）}$$

したがって，$(\sigma_r)_{max}$および$(\sigma_\theta)_{max}$の最大はM_rおよびM_θが最大となる位置で生じる．M_rが最大となる位置は

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\frac{p_0}{16}\{(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\}\right]$$

$$= \frac{p_0}{16}2\cdot(3+\nu)r \qquad (1)$$

これより，$r=0$でM_rは極大となる．$r=0$でのM_r（$=(M_r)_0$）は

$$(M_r)_0=\frac{p_0}{16}(1+\nu)a^2 \tag{2}$$

一方，$r=a$でのM_r（$=(M_r)_a$）は

$$(M_r)_a=\frac{p_0}{16}(-2a^2) \tag{3}$$

曲げモーメントのみが作用する状態での曲げ応力は，表面でσ_bなら裏面では$-\sigma_b$となる．したがって，曲げ応力の最大は，曲げモーメントの絶対値が最大となる位置で生じる．式(2)，(3) を比較すると，式(3) のほうがM_rの絶対値は大きい（ポアソン比νは0.5以下）．したがって，$(\sigma_r)_{max}$は周縁で生じる．

$$(\sigma_r)_{max}=\frac{6}{t^2}\frac{p_0}{16}2a^2$$

M_θはM_rより小さくなるので$\left(M_\theta=\frac{p_0}{16}(-2\nu a^2)\right)$，問題11.10を参考に

$$\sigma_1=(\sigma_r)_{max}=\frac{6}{t^2}\cdot\frac{p_0}{16}2a^2\leqq\sigma_a \quad (\sigma_a：許容応力)$$

$$\therefore\quad t^2\geqq\frac{p_0}{\sigma_a}\cdot\frac{3}{4}a^2$$

$$t\geqq20.54\ (\mathrm{mm})$$

ここで，軟鋼のポアソン比を0.3とした．