

## 第7章 はりの種々の問題

**問題 7.1** この問題は棒の自重による圧縮応力と、曲げによる縁応力（圧縮）を計算させる問題である。荷重ははりに対して斜めに作用しているので多少複雑では棒全体の全体のつり合いを考える。

- ・ 左右の力のつりあい：  $R_{AH} = R_{BH}$
- ・ 上下の力のつりあい（棒の単位長さあたりの重さを  $p$  とする）：  $R_{BV} = pL$

と 式は本問題の解答に、直接は必要ない。

AB 間の鉛直距離 =  $L \sin \mathbf{q}$ 、  $x = x$  点と B 点の水平距離 =  $(L - x) \cos \mathbf{q}$  から

- ・ B 点まわりのモーメントのつりあい：

$$R_{AH} \cdot L \sin \mathbf{q} = \int_0^L (L - x) \cos \mathbf{q} \cdot p dx = 0$$

$$R_{AH} \cdot L \sin \mathbf{q} = \int_0^L (L - x) \cos \mathbf{q} \cdot p dx = \frac{1}{2} p L^2 \cos \mathbf{q} \quad R_{AH} = \frac{pL \cos \mathbf{q}}{2 \sin \mathbf{q}}$$

断面  $mn$  にかかる軸圧縮力（絶対値）  $P$  は  $R_{AH}$  の軸方向分力（  $R_{AH} \cos \mathbf{q}$  ）と上端から  $x$  までの棒の重さの軸方向分力（  $px \sin \mathbf{q}$  ）の和となるので

$$P = R_{AH} \cos \mathbf{q} + px \sin \mathbf{q} = \frac{pL \cos^2 \mathbf{q}}{2 \sin \mathbf{q}} + px \sin \mathbf{q}$$

発生軸応力  $\sigma_x$  は常に圧縮となるので、次式となる。

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} = -\frac{4}{pd^2} \left( \frac{pL \cos^2 \mathbf{q}}{2 \sin \mathbf{q}} + px \sin \mathbf{q} \right)$$

断面  $mn$  における曲げモーメント  $M_x$  は、時計回りを正とし、自重による荷重は棒の軸線に対して斜めに作用しているので、軸線に垂直な成分のみを考える。

$$M_x + R_{AH} x \sin \mathbf{q} - \int_0^x (x - \mathbf{x}) \cdot p \cos \mathbf{q} d\mathbf{x} = 0 \quad M_x = -\frac{1}{2} pLx \cos \mathbf{q} + \frac{1}{2} px^2 \cos \mathbf{q}$$

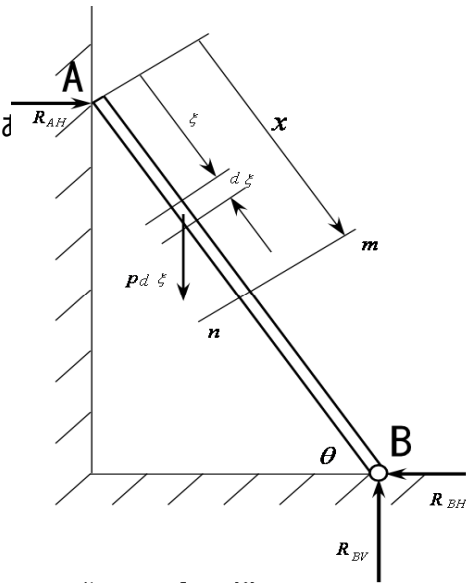
この曲げモーメントは  $L > x$  なので常にマイナスとなり、断面係数  $Z$  を用いて棒の上面での曲げ応力（圧縮）  $s_{xb}$  が次式で得られる。

$$s_{xb} = \frac{M_x}{Z} = \frac{32}{pd^3} \left( -\frac{1}{2} pLx \cos \mathbf{q} + \frac{1}{2} px^2 \cos \mathbf{q} \right)$$

断面  $mn$  (の上面) における圧縮応力の最大値  $s_{\max}$  は と の和から

$$s_{\max} = -\frac{4}{pd^2} \left( \frac{pL \cos^2 \mathbf{q}}{2 \sin \mathbf{q}} + px \sin \mathbf{q} \right) + \frac{32}{pd^3} \left( -\frac{1}{2} pLx \cos \mathbf{q} + \frac{1}{2} px^2 \cos \mathbf{q} \right)$$

求まる。圧縮応力の最大値は式 を  $x$  で微分して、次式で与えられる。



$$\frac{ds_{\max}(x)}{dx} = -\frac{4}{pd^2} p \sin \mathbf{q} + \frac{32}{pd^3} \left( -\frac{1}{2} pL \cos \mathbf{q} + px \cos \mathbf{q} \right) = 0 \quad x = \frac{L}{2} + \frac{d}{8} \tan \mathbf{q}$$

**問題7.2** 水平から  $\mathbf{a}$  の角度で傾いた状態で両端が支持されているはりに鉛直方向の等分布荷重  $f_0$  は、はりの  $z$  (水平) 方向に  $f_0 \sin \mathbf{a}$ 、 $y$  (垂直) 方向に  $f_0 \cos \mathbf{a}$  と分解できる。 $y$  方向の分布荷重は  $z$  軸周りの曲げモーメント  $M_z$ 、 $z$  方向の分布荷重は  $y$  軸周りの曲げモーメント  $M_y$  をそれぞれ生じる。両曲げモーメントの式は、6.2 節を参照すると、

$$M_y = -(f_0 \ell x / 2 - f_0 x^2 / 2) \sin \mathbf{a} \quad M_z = -(f_0 \ell x / 2 - f_0 x^2 / 2) \cos \mathbf{a}$$

両者ともに  $x = \ell / 2$  で最大となり、次式で与えられる。

$$M_{y,\max} = -f_0 \ell^2 \sin \mathbf{a} / 8 \quad M_{z,\max} = -f_0 \ell^2 \cos \mathbf{a} / 8$$

$z$  軸周りの断面二次モーメント  $I_z = bh^3 / 12$ 、 $M_{z,\max}$  による曲げ応力の最大値は、式(5.17)に  $y = -h / 2$  を用いて

$$s_{z,\max}^x = M_{z,\max} y / I_z = \frac{-f_0 \ell^2 \cos \mathbf{a}}{8} \left[ \frac{-h}{2} \right] \left( \frac{bh^3}{12} \right) = \frac{3}{4} \frac{f_0 \ell^2}{bh^2} \cos \mathbf{a}$$

次に、 $y$  軸周りの断面二次モーメント  $I_y = hb^3 / 12$ 、 $M_{y,\max}$  による曲げ応力の最大値は、同じく式(5.17)と  $z = -b / 2$  で

$$s_{y,\max}^x = M_{y,\max} z / I_y = \frac{-f_0 \ell^2 \sin \mathbf{a}}{8} \left[ \frac{-b}{2} \right] \left( \frac{hb^3}{12} \right) = \frac{3}{4} \frac{f_0 \ell^2}{hb^2} \sin \mathbf{a}$$

最大応力は、と を加えて、数値を代入すると、次の結果を得る。

$$s_{x,\max} = s_{y,\max}^x + s_{z,\max}^x = \frac{3f_0 \ell^2}{4bh} \left( \frac{\sin \mathbf{a}}{b} + \frac{\cos \mathbf{a}}{h} \right)$$

$$= \frac{3 \times 100 \times 2^2}{4 \times 20 \times 10^{-3} \times 30 \times 10^{-3}} \left( \frac{\sin 30^\circ}{20 \times 10^{-3}} + \frac{\cos 30^\circ}{30 \times 10^{-3}} \right) = 26.9 \times 10^6 (N / m^2) = 26.9 (MPa)$$

**問題7.3** 部材 BC に作用する外力  $P$  は水平方向荷重  $P_{y1} = P \cos \mathbf{a}$  と垂直荷重  $P_y = P \sin \mathbf{a}$  に分解すると、図に示すように、部材 AB には水平荷重  $P_{y1}$ 、曲げモーメント  $M = P_y a$  が作用する。C 点に作用する水平荷重  $P_{y1}$  により部材 BC の横方向変位  $v_1$  は、式(6.40)の片持ちはりが集中荷重を受けるときの結果を用いると、次のように求められる。

$$v_1 = \frac{P_{y1} h^3}{3EI} = \frac{P \cos \mathbf{a} h^3}{3EI}$$

片持ちはりの先端に曲げモーメントを受ける場合の横方向変位  $v_2$  (たわみ) は、式(6.8)のたわみの微分方程式に代入すると、

$$d^2v_2/dx^2 = -M/EI, \quad EId^2v_2/dx^2 = -M = -P_y a = -P \sin \alpha \cdot a$$

$$EIdv_2/dx = -P \sin \alpha \cdot a \cdot x + c_1, \quad Elv = -P \sin \alpha \cdot ax^2/2 + c_1x + c_2$$

境界条件  $x=0$  で  $v_2=0$  と  $dv_2/dx=0$  を と 代入すると、 $c_1=c_2=0$  となり、その結果、先端 ( $x=h$ ) で横変位  $v_2$  を得る。

$$v_2 = -P \sin \alpha \cdot ah^2 / 2EI$$

B 点の横方向変位 (たわみ) に関して  $\sum v = 0$  の条件から、解を得る。

$$v_1 + v_2 = 0 \quad \frac{P \cos \alpha h^3}{3EI} - \frac{P \sin \alpha \cdot ah^2}{2EI} = 0 \quad \tan \alpha = \frac{2h}{3a}$$

**問題 7.4** 両端支持で中央に集中荷重が作用する場合は、図 6.7 に示したように、はりの長さが半分、半分の集中荷重を受ける片持ちはりが中央で左右につながった問題と考えられるので、幅が一定の等強度はりの高さは、図 7.8 に示したような放物線をはりの中央で連結した形 (左右対称) になる。

次に等分布荷重  $f_0$  が作用する場合の曲げモーメントは 6.2 節の式

$$M = -f_0 \ell x / 2 + f_0 x^2 / 2$$

は  $x=0, \ell$  で  $M=0$ 、 $x=\ell/2$  で対称となり、最大値は次のように求まる。

$$M_{\max} = -f_0 \ell^2 / 8$$

$x$  軸の原点をはりの左端からはりの中央に移す ( $x + \ell/2 = X$ ) と、曲げモーメントの式は

$$M = -f_0 \ell (X - \ell/2) / 2 + f_0 (X - \ell/2)^2 / 2 = f_0 (X^2 - \ell^2 / 4) / 2$$

となり、今度は、曲げモーメントが中央  $X=0$  で  $M_{\max} = -f_0 \ell^2 / 8$  最大となる。

等強度はりを設計するために、はりの幅  $b$  一定とし、中央での高さを  $h_0$ 、 $X$  での高さを  $h$  とおき、断面係数  $Z = bh^2 / 6$  を用い、中央断面  $X = \ell/2$  での曲げ応力

$$s_{x1} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{-f_0 \ell^2 / 8}{bh_0^2 / 6}$$

はりの中央点から  $X$  での曲げ応力

$$s_{x2} = \frac{M}{Z} = \frac{f_0 (X^2 - \ell^2 / 4) / 2}{bh^2 / 6}$$

= から

$$\frac{-f_0 \ell^2 / 8}{bh_0^2 / 6} = \frac{f_0 (X^2 - \ell^2 / 4) / 2}{bh^2 / 6} \quad \frac{4X^2}{\ell^2} + \frac{h^2}{h_0^2} = 1$$

を得る。はりの厚さは楕円形に変化する。

問題 7.5 木材と鋼板の積層材の幅を  $b$  とし、中立軸を式(7.24)から求めると

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \frac{E_s b h_s (h_s / 2) + E_w b h_w (h_s + h_w / 2)}{E_s b h_s + E_w b h_w} = \frac{E_s h_s^2 + E_w (2h_s h_w + h_w^2)}{2(E_s h_s + E_w h_w)} \\ &= \frac{206 \times 10^9 \times 20^2 \times 10^{-6} + 10 \times 10^9 \times (2 \times 20 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^{-3} + 200^2 \times 10^{-6})}{2(206 \times 10^9 \times 20 \times 10^{-3} + 10 \times 10^9 \times 200 \times 10^{-3})} = 0.046 \text{ m} = 46 \text{ mm}\end{aligned}$$

鋼板部分の中立軸に関する断面二次モーメント  $I_s$ 、定義より

$$\begin{aligned}I_s &= \int_{-\bar{h}}^{-(\bar{h}-h_s)} y^2 dA = \int_{-\bar{h}}^{-(\bar{h}-h_s)} b y^2 dy = \frac{b [-(\bar{h}-h_s)^3 - (-\bar{h})^3]}{3} \\ &= 50 [-(46-20)^3 - (-46)^3] / 3 = 13.3 \times 10^5 \text{ mm}^4 = 13.3 \times 10^{-7} \text{ m}^4\end{aligned}$$

木材部分の中立軸に関する断面二次モーメント  $I_w$  も、定義より

$$\begin{aligned}I_w &= \int_{(\bar{h}-h_s)}^{(h_w+h_s-\bar{h})} y^2 dA = \frac{b [(h_s+h_w-\bar{h})^3 - (\bar{h}-h_s)^3]}{3}, \\ &= \frac{50 [(20+200-46)^3 - (46-20)^3]}{3} = 87.5 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 87.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4\end{aligned}$$

となる。両端支持で中央に集中荷重  $P$  を受ける場合の最大曲げモーメントは  $M_{\max} = -P\ell/4$  を式(7.25)に代入した式

$$s_{xi} = P\ell E_i \bar{h} / 4(E_w I_w + E_s I_s)$$

に、鋼板部分と木材部分でそれぞれ作用する応力の最大値を求めると

鋼板部分は  $h = -46 \text{ mm}$  を代入すると

$$s_{xs} = \frac{-7 \times 10^3 \times 2 \times 206 \times 10^9 \times (-46) \times 10^{-3}}{4(206 \times 10^9 \times 13.3 \times 10^{-7} + 10 \times 10^9 \times 87.5 \times 10^{-6})} = 28.9 \text{ MPa}$$

板材部分は  $h = 200 + 20 - 46 = 174 \text{ mm}$  を代入すると

$$s_{xw} = \frac{-7 \times 10^3 \times 2 \times 10 \times 10^9 \times 174 \times 10^{-3}}{4(206 \times 10^9 \times 13.3 \times 10^{-7} + 10 \times 10^9 \times 87.5 \times 10^{-6})} = -5.3 \text{ MPa}$$

たわみは、単一材の場合の式(6.28)の  $EI$  をに等価曲げ剛性に変えて

$$\begin{aligned}v_{\max} &= -\frac{p\ell^3}{48(E_w I_w + E_s I_s)} \\ &= \frac{-7 \times 10^3 \times 2^3}{48(206 \times 10^9 \times 13.3 \times 10^{-7} + 10 \times 10^9 \times 87.5 \times 10^{-6})} = -1.02 \times 10^{-3} \text{ m} = -1.02 \text{ mm}\end{aligned}$$

問題 7.6 式(7.32)の  $s_s$  と  $s_{c \max}$  の比から  $h_0 b$  を求める。

$$\frac{s_s}{s_{c \max}} = \frac{M_a / [A_s (d - h_0 / 3)]}{2M_a / [h_0 b (d - h_0 / 3)]} = \frac{h_0 b}{2A_s} \quad h_0 b = 2A_s (s_s / s_{c \max})$$

を式(7.30)  $bh_0^2 + 2A_s n h_0 - 2A_s n d = 0$  の第1項に代入すると

$$2A_s (s_s / s_{c \max}) h_0 + 2A_s n h_0 - 2A_s n d = 0$$

$$(s_s / s_{c \max}) h_0 + n h_0 - n d = 0$$

を得る。 から  $h_0 = (2A_s / b)(s_s / s_{c \max})$  を に代入すると

$$(2A_s / b)(s_s / s_{c \max}) [(s_s / s_{c \max}) + n] - n d = 0$$

$$A_s = \frac{n b d}{2(s_s / s_{c \max}) [(s_s / s_{c \max}) + n]}$$

を得る。ここで  $d \approx h$  とし、 に数値を代入して解を得る。

$$A_s = \frac{15 \times 220 \times 510}{2 \times (100/5) [(100/5) + 15]} = 1202 \text{ mm}^2$$

**問題 7.7** コンクリートの自重によって生じる圧縮応力は AB 面で最大になる。コンクリートの密度を  $r_c$  とすると擁壁の自重は  $P = r_c g \ell h_0 / 2$  (紙面の垂直方向を単位幅とした) から圧縮応力、次式で与えられる。

$$s_c = -P / (h_0 \times 1) = -r_c g \ell / 2$$

また、水圧により AB 面には曲げ応力が生じる。この曲げ応力は、水の密度を  $r_w$  とおくと、例題 6.1 で  $f_0 = r_w g \ell$  となり、 $M_{\max} = r_w g \ell^3 / 6$  が求まり、曲げ応力は

$$s_x = M / Z = (r_w g \ell^3 / 6) / (h_0^2 / 6) = r_w g \ell^3 / h_0^2$$

となる。B 点の応力ゼロの条件 (  $+ = 0$  ) から、解が求まる。

$$-r_c g \ell / 2 + r_w g \ell^3 / h_0^2 = 0 \quad h_0 = \sqrt{\frac{2r_w}{r_c}} \ell = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{2300}} \times 20 = 18.7 \text{ m}$$

**問題 7.8** 両端支持のはりの場合の曲げモーメントの最大値は図 6.4 から  $M_{\max} = -P \ell_1 \ell_2 / \ell$  を用いて、まず垂直荷重  $P$  の場合は、幅方向の軸周りに曲げモーメントを生じ、はり下面が引張り状態となり、軸方向に引張り応力が作用し、次のようにが求まる。

$$s_{x1} = |M| / Z = \frac{P \ell_1 \ell_2 / \ell}{a^3 / 6} = \frac{1 \times 10^3 \times (2/3) \times (1/3)}{50^3 \times 10^{-9} / 6} = 10.7 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 10.7 \text{ MPa}$$

次に水平荷重点  $P$  により、厚さ方向の軸周りに曲げモーメントが生じ、はりの幅方向の手前の面が引張り状態で、やはり軸方向に引張り応力となる。この応力は垂直荷重の場合と同様に計算され、

$$s_{x2} = |M| / Z = \frac{P \ell_1 \ell_2 / \ell}{a^3 / 6} = \frac{1 \times 10^3 \times (1/3) \times (2/3)}{50^3 \times 10^{-9} / 6} = 10.7 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 10.7 \text{ MPa}$$

となる。両方の荷重による軸方向の引張り応力は両者の和から次の値となる。

$$s_x = s_{x1} + s_{x2} = 21.4 \text{ MPa}$$

**問題 7.9** ラーメンを A 点で仮想的に切断してみると、部材 AB は両端支持はりに荷重  $P$  とモーメント  $M_0$  が作用するはりと考えられ、部材 AC は両端に曲げモーメント  $M_0$  だけが作用するはりと考えられる。ラーメンの条件から点 A での角度変化は生じないため、部材 AB の角度  $q_A$  と部材 AC の角度  $q'_A$  の和はゼロの条件から  $M_0$  をまず求める。

部材 AB の角度  $q_A$  は、両端支持で中央に集中荷重が作用する場合の右端でのたわみ角の式(6.29)

から求めた値を  $q_{A1}$  と同じく両端に曲げモーメントが作用する場合の式 (6.62) に  $x=0, M_A = M_B = M_0$  を代入して求めた値  $q_{A2}$  の和となる。

$$q_A = q_{A1} + q_{A2} = -Pa^2 / 16EI + M_0 a / 2EI$$

部材 AC の角度  $q'_A$  は式(6.62)に  $x=b, M_A = M_B = -M_0$  を代入して

$$q'_A = M_0 b / 2EI$$

+ の条件から

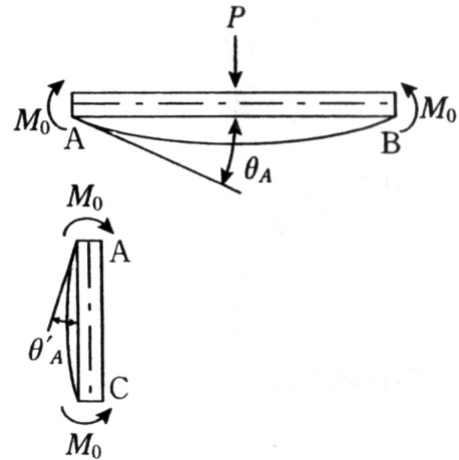
$$-Pa^2 / 16EI + M_0 a / 2EI + M_0 b / 2EI = 0$$

$$M_a = Pa^2 / 8(a+b)$$

部材 AB の最大曲げモーメントは両端支持で中央に手中荷重が作用した場合の結果に  $M_0$  を足し合わせて、断面係数で割れば最大曲げ応力を得る。

$$M_{\max} = -Pa / 4 + M_0 = -Pa / 4 + Pa^2 / 8(a+b)$$

$$\sigma_x = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{-Pa / 4 + Pa^2 / 8(a+b)}{Z} = \frac{-Pa(a+2b)}{8Z(a+b)}$$



**問題 7.10** 固定端から  $x$  での曲げモーメントは、 $M = f_0(\ell - x)^3 / 6\ell$ 、固定端では  $M_0 = f_0\ell^2 / 6$  (例題 6.1 参照) となるので、幅  $b$  を一定、固定端の厚さを  $h_0$ 、 $x$  での厚さを  $h$  とおくと等強度はりの条件から、

$$\frac{f_0\ell^2 / 6}{bh_0^2 / 6} = \frac{f_0(\ell - x)^3 / 6\ell}{bh^2 / 6} \quad h = h_0 \left( \frac{\ell - x}{\ell} \right)^{3/2}$$

曲げの微分方程式  $d^2v / dx^2 = -M / EI$  に、上式で求めた  $h$  を  $I$  に代入して計算すると

$$d^2v / dx^2 = -\frac{f_0(\ell - x)^3 / 6\ell}{Ebh_0^3(\ell - x)^{9/2} / 12\ell^{9/2}} = -\frac{2f_0\ell^{7/2}}{Ebh_0^3} \frac{1}{(\ell - x)^{3/2}}$$

$$dv / dx = -\frac{4f_0\ell^{7/2}}{Ebh_0^3} \frac{1}{(\ell - x)^{1/2}} + c_1, \quad v = \frac{8f_0\ell^{7/2}}{Ebh_0^3} (\ell - x)^{1/2} + c_1x + c_2$$

固定端  $x=0$  で  $v=0$  の条件から  $c_1 = \frac{4f_0\ell^3}{Ebh_0^3}$

$$x=0 \text{ で } dv / dx = 0 \quad \frac{8f_0\ell^4}{Ebh_0^3} + c_2 = 0 \quad c_2 = -\frac{8f_0\ell^4}{Ebh_0^3}$$

したがって、はりの先端  $x = \ell$  でのたわみ  $v = c_1\ell + c_2 = -\frac{4f_0\ell^4}{Ebh_0^3}$  となる。

**問題 7.11** 木材と鋼板の積層材の幅を  $b$  とし、中立軸を式(7.24)から求めると

$$\bar{h} = \frac{E_1bh_1(h_1/2) + E_2bh_2(h_1 + h_2/2) + E_3bh_3(h_1 + h_2 + h_3/2)}{E_1bh_1 + E_2bh_2 + E_3bh_3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E_1 h_1^2 + E_2 h_2 (2h_1 + h_2) + E_3 h_3 (2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2 + E_3 h_3)} \\
&= \frac{10^9 \times 10^{-6} \times [103 \times 10^2 + 4.5 \times 100 \times (2 \times 10 + 100) + 103 \times 20 \times (2 \times 10 + 2 \times 100 + 20)]}{2 \times 10^9 \times 10^{-3} \times (103 \times 10 + 4.5 \times 100 + 103 \times 20)} \quad \text{下のチタン} \\
&= 78.9 \times 10^{-3} \text{ m} = 79 \text{ mm}
\end{aligned}$$

部分の中立軸に関する断面二モーメント  $I_1$ 、定義より

$$I_s = \int_{-\bar{h}}^{-(\bar{h}-h_1)} y^2 dA = \int_{-79}^{-69} b y^2 dy = \frac{100 [(-69)^3 - (-79)^3]}{3} = 54.8 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

バルサ部分の中立軸に関する断面二次モーメント  $I_2$  は

$$I_2 = \int_{-(\bar{h}-h_1)}^{(h_1+h_2-\bar{h})} y^2 dA = \int_{-69}^{10+100-79} b y^2 dy = \frac{100 [31^3 - (-69)^3]}{3} = 11.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

上のチタン部分の断面二次モーメント  $I_3$  は

$$I_3 = \int_{(h_1+h_2-\bar{h})}^{(h_1+h_2+h_3-\bar{h})} y^2 dA = \int_{10+100-79}^{10+100+20-79} b y^2 dy = \frac{100 [51^3 - (31)^3]}{3} = 34.3 \times 10^5 \text{ mm}^4 \text{ とそれぞれ計算}$$

できる。中央に集中荷重を受ける両端支持の曲げモーメントの最大値 ( $M_{\max} = -P\ell/4$ ) を式(7.25)に代入して

$$s_x = \frac{-P\ell E_p \bar{h}}{4(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)}$$

下のチタン部分の外側  $h = -79 \text{ mm}$  に作用する応力の最大値を も用いると

$$s_x = \frac{-3 \times 10^3 \times 3 \times 103 \times 10^9 \times (-79) \times 10^{-3}}{4 \times 10^9 \times 10^{-12} (103 \times 54.8 \times 10^5 + 5.4 \times 11.9 \times 10^6 + 103 \times 34.3 \times 10^5)} = 18.6 \text{ MPa}$$

上側のチタン部分の外側  $h = 130 - 79 = 51 \text{ mm}$  に圧縮の応力の最大値

$$s_x = \frac{-3 \times 10^3 \times 3 \times 103 \times 10^9 \times (51) \times 10^{-3}}{4 \times 10^9 \times 10^{-12} (103 \times 54.8 \times 10^5 + 5.4 \times 11.9 \times 10^6 + 103 \times 34.3 \times 10^5)} = -12.0 \text{ MPa}$$

バルサ部分の引張り応力は  $h = -69 \text{ mm}$  として

$$s_x = \frac{-3 \times 10^3 \times 3 \times 5.4 \times 10^9 \times (-69) \times 10^{-3}}{4 \times 10^9 \times 10^{-12} (103 \times 54.8 \times 10^5 + 5.4 \times 11.9 \times 10^6 + 103 \times 34.3 \times 10^5)} = 0.85 \text{ MPa}$$

バルサ部分の圧縮応力の最大値は  $h = 110 - 79 = 31 \text{ mm}$

$$s_x = \frac{-3 \times 10^3 \times 3 \times 5.4 \times 10^9 \times (31) \times 10^{-3}}{4 \times 10^9 \times 10^{-12} (103 \times 54.8 \times 10^5 + 5.4 \times 11.9 \times 10^6 + 103 \times 34.3 \times 10^5)} = -0.38 \text{ MPa}$$

となる。また、たわみの最大値は両端支持で中央に集中荷重をうけるたわみの式(6.28)の  $EI$  を等価剛性 ( $E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3$ ) に変える。

$$\begin{aligned}
v_{\max} &= -\frac{p\ell^3}{48(E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3)} \\
&= -\frac{3 \times 10^3 \times 3^3}{48 \times 10^9 \times 10^{-12} (103 \times 54.8 \times 10^5 + 5.4 \times 11.9 \times 10^6 + 103 \times 34.3 \times 10^5)} = -1.72 \times 10^{-3} \text{ m}
\end{aligned}$$

**問題 7.12** 鉄筋コンクリートはりのコンクリートの全断面積  $A_s = 5 \times 3.14 \times 15^2 / 4 = 883 \text{mm}^2$  を鉄筋コンクリートはりの中立軸の位置を求める式(7.31)に代入して

$$h_0 = \left[ -A_s n + \left( A_s^2 n^2 + 2A_s n b d \right)^{1/2} \right] / b$$

$$= \left[ -883 \times 15 + \left( 883^2 \times 15^2 + 2 \times 883 \times 15 \times 250 \times 500 \right)^{1/2} \right] / 250 = 183 \text{mm}$$

コンクリートに生じる圧縮応力の最大値は式(7.32)に与えられた寸法を代入すると、

$$(s_c)_{\max} = \frac{2M_a}{h_0 b (d - h_0 / 3)} \quad 3 \times 10^6 = \frac{2M_a}{183 \times 250 (500 - 183 / 3) \times 10^{-9}}$$

$$M_a = 0.3 \times 10^5 (N \cdot m)$$

分布荷重を受ける両端支持のはりの最大曲げモーメント  $M = f_0 \ell^2 / 8$  と  $M_a = M$  の条件から、

$$0.3 \times 10^5 = f_0 \ell^2 / 8 \quad f_0 = 8 \times 0.3 \times 10^5 / 5^2 = 9.65 \times 10^3 \text{ N/m} = 9.65 \text{ N/mm}$$

鉄筋に生じる最大引張り応力は式(7.32)の最初の式から、次のような値を得る。

$$s_s = \frac{M_a}{A_s (d - h_0 / 3)} = \frac{9.65 \times 10^3 \times 5^2 / 8}{883 \times 10^{-6} (0.5 - 0.183 / 3)} = 77.8 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 77.8 \text{MPa}$$