問題 8.1　**式**(8.7)**の** θ **を** θ + π/2 **におきかえる。すなわち、**

$$\cos 2(q + \frac{p}{2}) = -\cos 2q \qquad \sin 2(q + \frac{p}{2}) = -\sin 2q$$

よりただちに式(8.9)**が得られる。**

問題 8.2　$q = \frac{p}{4}$ **のとき** $\cos q = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\sin q = \frac{1}{\sqrt{2}}$　**であるので、これを式**(8.5)、(8.6)**に代入すると**

$$s_n = \frac{1}{2}s_x + \frac{1}{2}s_y + t_{xy}、\ t_{xy} = \frac{1}{2}(s_y - s_x)$$

となる。そこで $s_x = 100(\mathrm{MPa})$ 、$s_y = 50(\mathrm{MPa})$、$t_{xy} = 50(\mathrm{MPa})$ **を代入すると**

$$s_n = 125(\mathrm{MPa})\ 、\ t_n = -25(\mathrm{MPa})$$

問題 8.3　**式**(8.75)**より**

$$K = \frac{210}{3(1-2\times 0.3)} = 175(\mathrm{GPa})$$

問題 8.4　**式**(8.103)**に** $s_1 = s_q = 20p$、$s_2 = s_x = 10p$、$s_3 = s_r = 0$ **（以上、例題** 8.5 **で計算済み）を代入すると、**

$$\sqrt{(20p)^2 + (10p)^2 - 20p \times 10p} = 10\sqrt{3}p$$

となり、これが $s_y = 240(\mathrm{MPa})$ **と等しいとき降伏するので、**

$$p = \frac{240}{10\sqrt{3}} = 13.9(\mathrm{MPa})$$

問題 8.5　**式**(8.115)、(8.116)**がそのまま使え、**

$$e_x = e_1 = 1000me \qquad e_y = e_3 = 200me \qquad g_{xy} = 2e_2 - (e_x + e_y) = 200me$$

問題 8.6

図参照。

問題 8.5 **で得られた** $e_x = 1000me$ 、$e_y = 200me$ 、$g_{xy} = 200me$ **を使う。**

まず横軸に e **、縦軸に** $\frac{1}{2}g$ **の座標軸をとる。せん断ひずみは工学せん断ひずみの半分をとる**

ことに注意。

(1)　次に $\mathrm{P}'(e_x, -\frac{1}{2}g_{xy}) = \mathrm{P}'(1000, -100)$

(2)　円の中心Ｃの e 座標は２つの主ひずみの平均になっており、またひずみについても式(8.25)と同様の関係があるので、

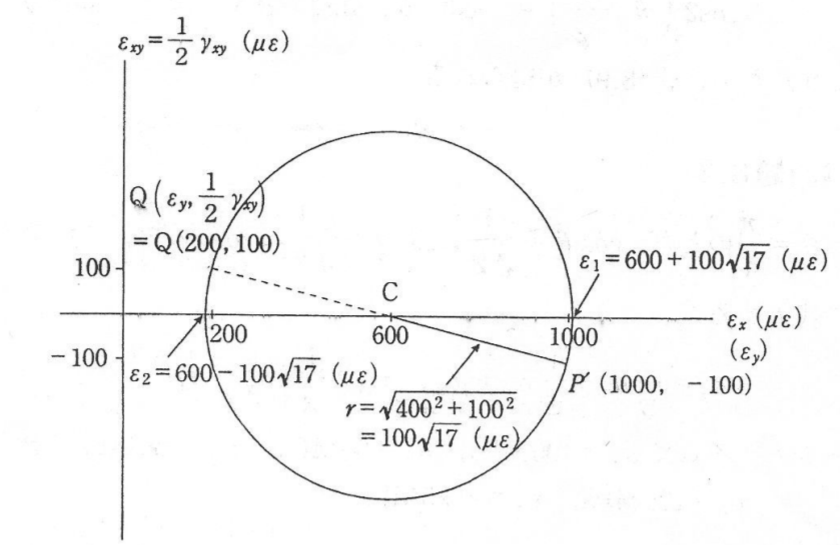
$\mathrm{C}(e, 0) = \mathrm{C}(\frac{e_x + e_y}{2}, 0) = \mathrm{C}(600, 0)$ である。

(3)　Ｃを中心、$\overline{\mathrm{CP}'}$ を半径（半径は

(4)　$r = \sqrt{(1000-600)^2 + 100^2} = 100\sqrt{17}(me)$）

とする円を描けば、これがモールのひずみ円である。

(5)　主ひずみの値はＣ点のひずみに半径を加える、あるいは減じればよい。



問題 8.7　式(8.7)~(8.9)より　$s_{x'}s_{y'} - t_{x'y'}$

$$= \left[\frac{1}{2}(s_x + s_y) + \left\{\frac{1}{2}(s_x - s_y)\cos 2q + t_{xy}\sin 2q\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{2}(s_x + s_y) - \left\{\frac{1}{2}(s_x - s_y)\cos 2q + t_{xy}\sin 2q\right\}\right]$$

$$-\left\{-\frac{1}{2}(s_x - s_y)\sin 2q + t_{xy}\cos 2q\right\}^2$$

$$= \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \left\{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta\right\}^2$$ （和と差の積）

$$-\left\{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta\right\}^2$$

$$= \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2$$

$$-[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$$ （第２項と第３項を展開）

$$+(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy}\cos 2\theta \sin 2\theta$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy}\cos 2\theta \sin 2\theta$$

$$+\tau_{xy}^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)]$$

$$= \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 - \tau_{xy}^2$$ （ピタゴラスの定理適用）

$$= \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$$

(1) 式(8.17)より

$$\sigma_1\sigma_2$$

$$= \left\{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \frac{1}{4}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2\right\}$$ （和と差の積）

$$= \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$$

(2) 式(a)の行列式の値は

$$(\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}^2 = 0$$

すなわち

$$\lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\lambda + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \qquad \text{(b)}$$

これより

$$l = \cdots = \frac{1}{2}(s_x + s_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2}$$

となる。これは式(8.17)と同じで、確かに主応力σ$_1$、σ$_2$である。すなわち式(a)は

$$(l - s_1)(l - s_2) = 0$$

とも書ける。これを展開すると

$$l^2 - (s_1 + s_2)l + s_1 s_2 = 0 \qquad \text{(c)}$$

となり、(b)式と係数比較すると、

$$s_x + s_y = s_1 + s_2、\ s_x s_y - t_{xy}^2 = s_1 s_2$$

と、１次、２次の不変量が同時に求まる。

（参考）固有値問題と主応力、不変量

座標変換

$$\begin{bmatrix} s_{x'} & t_{x'y'} \\ t_{x'y'} & s_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} \\ t_{xy} & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \text{p.141, 式(8.14)}$$

いま $s_{x'}$ のみを考える（$s_{x'}$ の極値＝主応力をさがす)。

$$s_{x'} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} \\ t_{xy} & s_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}$$

ここで　$l_1 \to l$ 、$m_1 \to m$　とおく

$$s_{x'} = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & t_{xy} \\ t_{xy} & s_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = s_x l^2 + s_y m^2 + 2t_{xy} lm$$

(1)

方向余弦には

$$l^2 + m^2 = 1 \qquad (2)$$

の関係があるので、l, m のうち独立なものは１つであるが、未定定数 l をもちこみ、

$$\Phi = s_{x'} - l(l^2 + m^2 - 1) \qquad (3)$$

の極値を、あたかも l, m が独立変数であるように扱って求める(これを Lagrange の未定定数法という)。

極値　すなわち　$\dfrac{\partial \Phi}{\partial l} = 0$、$\dfrac{\partial \Phi}{\partial m} = 0$

(1), (3) $\rightarrow$ $\Phi = (s_x - l)l^2 + (s_y - l)m^2 + 2t_{xy}lm + l$ (4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = 2(s_x - l)l + 2t_{xy}m = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 2(s_y - l)m + 2t_{xy}l = 0 \quad (6)$$

(5), (6) を行列表示

$$\begin{bmatrix} s_x & t_{xy} \\ t_{xy} & s_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = l \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} \quad (7)$$

intermission

固有値問題の基本形

$$A\mathbf{u} = l\mathbf{u} \quad (a)$$

ベクトル $\mathbf{u} = \mathbf{0}$（trivial）以外に上の式を満足する l があるか。あるとき、l を A の固有値、$\mathbf{u}$ を固有ベクトルという。固有値は

$$|A - lE| = 0 \quad (b)$$

より求められる。E は単位行列。end of intermission

(7)は(a)と同形 $\rightarrow$ (b)より

$$\begin{vmatrix} s_x - l & t_{xy} \\ t_{xy} & s_y - l \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

$$\rightarrow (s_x - l)(s_y - l) - t_{xy}^2 = 0$$

$$\rightarrow l^2 - l(s_x + s_y) + s_x s_y - t_{xy}^2 = 0 \quad (9)$$

すなわち

$$l = \frac{1}{2}(s_x + s_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(s_x - s_y)^2 + 4t_{xy}^2}$$

これは式(8.17)の主応力そのものである。

◎　主応力を求める問題は固有値問題である。

したがって主応力 s_1, s_2 は $(l - s_1)(l - s_2) = 0$ の根。

$$l^2 - l(s_1 + s_2) + s_1 s_2 = 0 \quad (10)$$

(9)と(10)の係数比較

$$s_x + s_y = s_1 + s_2 \equiv I_1$$

$$s_x s_y - t_{xy}^2 = s_1 s_2 \equiv I_2$$

s_1, s_2は座標軸のとり方に無関係な量なので、$s_x + s_y$、$s_x s_y - t_{xy}^2$も座標軸に無関係、すなわち不変量である。

問題 8.8　図 8.48(a)で、法線が x 軸とqの角をなす面の応力は p.140 の式(8.7)、(8.8)で求められる。いま　$s_x = 0$、$s_y = 0$、$t_{xy} = t$、$q = 45°$　とおくと

$$s_{x'} = t_{xy} \sin 2q = t \text{、} \quad t_{x'y'} = t_{xy} \cos 2q = 0$$

となり、また式(8.9)より

$$s_{y'} = -t_{xy} \sin 2q = -t$$

となるが、これは法線が x 軸と 45 ° の角をなす面には垂直応力t、せん断応力 0、それと直角の面（y'方向）には垂直応力$-t$ が作用することを意味している。これは図 8.48(b)にほかならない。

問題 8.9　正方形 ABCD にせん断応力t をかけると、ひし形 A'BC'D'になる。

$$\mathrm{DK'} = \mathrm{CC'} = a\frac{g}{2} \text{、} \quad \mathrm{DK''} = \mathrm{AA'} = a\frac{g}{2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{DD'}}{\mathrm{BD}} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{DK'}}{\mathrm{BD}} = \frac{\sqrt{2}ag/2}{\sqrt{2}a} = \frac{g}{2} = \frac{t}{2G} \qquad \text{(a)}$$

一方、正方形 EFGH に$\pm t$ の引張り・圧縮応力をかけると、長方形 E'F'G'H'になる。いま BD 方向に x 軸、BF 方向に y 軸をとる。

$$s_x = t \text{、} \quad s_y = -t$$

$$\frac{DD'}{BD} = e_x = \frac{1}{E}(s_x - n s_y) = \frac{(1+n)t}{E} \qquad \text{(b)}$$

上の(a)と(b)は同じなので、右辺同士を等置して

$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$ (8.69)が得られる。

問題 8.10　**この場合、図** 8.34 **に加え、**$\dfrac{4P}{pd^2}$**の引張り応力が加算される。せん断応力は変わらない。したがって式**(8.107)**は**

$$s_{\max} = \frac{32M}{pd^3} + \frac{4P}{pd^2} = \frac{32}{pd^3}(M + \frac{Pd}{8}) = \frac{32}{pd^3}M' \qquad \text{(a)}$$

ただし

$$M' = M + \frac{Pd}{8} \qquad \text{(b)}$$

となる。式(8.105)**は変わらない。これより相当曲げモーメント、相当ねじりモーメントは式**(8.109)**、**(8.111)**で**M **を上式**(b)**の**M'**でおきかえればよい。**

問題 8.11　**与題より、**$q_1 = 0$**、**$q_2 = \dfrac{p}{3}$**、**$q_3 = \dfrac{2p}{3}$**であるので**

$$\cos q_1 = 1、\sin q_1 = 0、\cos q_2 = \frac{1}{2}、\sin q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}、$$

$$\cos q_3 = -\frac{1}{2}、\sin q_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。これを式(8.114)**に代入して**

$$e_1 = e_x \qquad \text{(a)}$$

$$e_2 = \frac{1}{4}e_x + \frac{3}{4}e_y + \frac{\sqrt{3}}{4}g_{xy} \qquad \text{(b)}$$

$$e_3 = \frac{1}{4}e_x + \frac{3}{4}e_y - \frac{\sqrt{3}}{4}g_{xy} \qquad \text{(c)}$$

これより

$$e_x = e_1、e_y = \frac{2}{3}(e_2 + e_3 - \frac{1}{2}e_1)、g_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3)$$

が解。