第９章　エネルギ法

問題 9.1　棒の材料の単位体積あたりの重量（比重量）をqとすると、下端にx軸の原点を置き、下端からxの距離にある断面上の引張り応力σは、xまでの重量をqAxを断面積Aで割って

$$\sigma = qAx / A = qx$$

となる。xの位置での微小厚さdxの微小体積Adxに蓄えられるひずみエネルギはdUは、式（9.7）から

$$dU = \left(\sigma^2 / 2E\right) A dx = \left(q^2 x^2 A / 2E\right) dx \qquad ①$$

したがって、棒全体に蓄えられる弾性ひずみエネルギUは式①を 0 からℓまで積分して求まるが、$q = mg / \left(A\ell\right)$とおくと次式で与えられる

$$U = \int_0^\ell dU = \int_0^\ell \frac{q^2 x^2 A}{2E} dx = \frac{q^2 A \ell^3}{6E} = \frac{\left(mg / A\ell\right)^2 A \ell^3}{6E} = \frac{m^2 g^2 \ell}{6EA}$$

問題 9.2　棒(a)の場合の引張り応力の最大値をσ_eとし、棒(a)、(b)、(c)の弾性ひずみエネルギをそれぞれU_a, U_b, U_cとおくと、U_aは式（9.6）から

$$U_a = \frac{\sigma^2}{2E} A\ell = \frac{{\sigma_e}^2}{2E} A\ell = \frac{{\sigma_e}^2}{2E} \frac{\pi}{4} (2d)^2 2\ell = \frac{{\sigma_e}^2 \pi d^2 \ell}{E} \qquad ①$$

棒(b)は、変断面の位置で応力集中はないとすると直径dの部分の応力が最大値となるのでσ_e、直径$2d$の部分の応力は断面積が 2 倍なので$\sigma_e / 4$となるので

$$U_b = \frac{\sigma^2}{2E} A\ell = \frac{{\sigma_e}^2}{2E} \frac{\pi}{4} d^2 \ell + \frac{\left(\sigma_e / 4\right)^2}{2E} \frac{\pi}{4} \left(2d\right)^2 \ell = \frac{{\sigma_e}^2 \pi d^2 \ell}{8E} + \frac{{\sigma_e}^2 \pi d^2 \ell}{32E} = \frac{5{\sigma_e}^2 \pi d^2 \ell}{32E} \qquad ②$$

棒(c)の最大引っ張り応力は、長さ方向に一定でσ_eとなり、

$$U_c = \frac{\sigma^2}{2E} A\ell = \frac{{\sigma_e}^2}{2E} \frac{\pi}{4} d^2 \left(2\ell\right) = \frac{{\sigma_e}^2 \pi d^2 \ell}{4E} \qquad ③$$

式①、②と③に比をとると$U_a : U_b : U_c$＝32 : 5 : 8 となる。

問題 9.3　固定端Ａからxの位置での曲げモーメントM_xは

$$M_x = -R_A x + M_A + f_0 x^2 / 2$$

となる。曲げモーメントによるはり全体のひずみエネルギUは式（9.20）より

$$U = \int_0^\ell \frac{{M_x}^2}{2EI} dx$$

である。固定端xでのたわみゼロの条件とカスティリアノの定理より

$$0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial U}{\partial M_x} \frac{\partial M_x}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI} \int_0^\ell 2M_x \frac{\partial M_x}{\partial R_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(-R_A x + M_A + \frac{f_0 x^2}{2} \right) (-x) dx$$

$$=\frac{1}{EI}\left[\frac{R_A x^3}{3}-\frac{M_A x^2}{2}-\frac{f_0 x^4}{8}\right]_0^{\ell}=\frac{1}{EI}\left[\frac{R_A \ell^3}{3}-\frac{M_A \ell^2}{2}-\frac{f_0 \ell^4}{8}\right]$$

$$\therefore 12M_A-8R_A\ell+3f_0\ell^2=0 \qquad ①$$

同じく固定端xでのたわみ角ゼロの条件とカスティリアノの定理より

$$0=\frac{\partial U}{\partial M_A}=\frac{\partial U}{\partial M_x}\frac{\partial M_x}{\partial M_A}=\frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}2M_x\frac{\partial M_x}{\partial M_A}dx=\frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(-R_A x+M_A+\frac{f_0 x^2}{2}\right)(1)dx$$

$$=\frac{1}{EI}\left[-\frac{R_A x^2}{2}+M_A x+\frac{f_0 x^3}{6}\right]_0^{\ell}=\frac{1}{6EI}\left[-3R_A\ell^2+6M_A\ell+f_0\ell^3\right]$$

$$\therefore 6M_A-3R_A\ell+f_0\ell^2=0 \qquad ②$$

式①と②を連立して解くと、

$$R_A=f_0\ell/2=R_B$$

が得られる。また、①式に$R_A=f_0\ell/2$を代入し整理すればM_Aが求まり、次のようになる。

$$12M_A=8R_A\ell-3f_0\ell^2=4f_0\ell^2-3f_0\ell^2=f_0\ell^2$$

$$\therefore M_A=f_0\ell^2/12=M_B$$

問題 9.4

方針：C 点に仮想荷重P'と仮想モーメントM'をかけ、例題 9.9 と同様に

$$\delta_C=\left[\frac{\partial U}{\partial P'}\right]_{P'=0}、\ i_C=\left[\frac{\partial U}{\partial M'}\right]_{M'=0} \qquad (1)$$

により求める。

準備事項

外力による曲げモーメント

$$M_P=Px \qquad (2)$$

仮想荷重P'による曲げモーメント

$0\le x\le \ell/2$ で $M_{P'}=0$ $\quad \rightarrow \dfrac{\partial M_{P'}}{\partial P'}=0$ （あとで使う）(3)

$\ell/2\le x\le \ell$ で $M_{P'}=P'(x-\ell/2)$ $\quad \dfrac{\partial M_{P'}}{\partial P'}=x-\ell/2$

仮想モーメントM'による曲げモーメント

$0\le x\le \ell/2$ で $M_{M'}=0$ $\quad \rightarrow \dfrac{\partial M_{M'}}{\partial M'}=0$ (5)

$\ell/2 \leq x \leq \ell$ で $M_{M'} = M' \quad \rightarrow \dfrac{\partial M_{M'}}{\partial M'} = 1$ (6)

全体では

$$M = M_P + M_{P'} + M_{M'} \tag{7}$$

ひずみエネルギ

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \int \frac{(M_P + M_{P'} + M_{M'})^2}{2EI} dx \tag{8}$$

カスティリアノの定理

集中荷重Pが作用するとき、その点の荷重方向の変位（一様断面棒を仮定して EI を積分の外に出している）

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{2EI}\frac{\partial}{\partial P}\int M^2 dx = \frac{1}{2EI}\int \frac{\partial M^2}{\partial P} dx = \frac{1}{2EI}\int \frac{\partial M^2}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial P} dx \tag{9}$$

現問題への適用

P 、P' 、M' が同時に作用するときのC点の変位

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P'} = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial P'} dx = \frac{1}{EI}\int_{\ell/2}^{\ell} \{Px + P'(x-\ell/2) + M'\}(x-\ell/2) dx$$

（$\because$ $0 \leq x \leq \ell/2$ では $\dfrac{\partial M_{P'}}{\partial P'} = 0$ なので、その部分の積分は0）

$$= \frac{1}{EI}\left[P\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{4}\right) + P'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\ell x^2}{2} + \frac{\ell^2 x}{4}\right) + M'\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2}\right)\right]_{\ell/2}^{\ell} \tag{10}$$

（第２項、第３項は使わないので、積分を途中で止めてある）

$P' \rightarrow 0$ 、$M' \rightarrow 0$ のときが求める変位

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[P\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{4}\right)\right]_{\ell/2}^{\ell} = \frac{5P\ell^3}{48EI} \tag{11}$$

たわみ角も同様にして求められる。

P 、P' 、M' が同時に作用するときのC点のたわみ角は

$$i_C = \frac{\partial U}{\partial M'} = \frac{1}{EI}\int M \frac{\partial M}{\partial M'} dx = \frac{1}{EI}\int_{\ell/2}^{\ell} \{Px + P'(x-\ell/2) + M'\}(1) dx \tag{12}$$

（$\because$ $0 \leq x \leq \ell/2$ では $\dfrac{\partial M_{M'}}{\partial M'} = 0$ なので、その部分の積分は0）

$$i_C = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^2}{2}\right]_{\ell/2}^{\ell} = \frac{3P\ell^2}{8EI}$$

$P'\to 0$、$M'\to 0$ のときが求めるたわみ角なので式（12）中の P' と M' が含まれる項の積分は途中で止めてある。

＜別解＞仮想仕事の原理：誘導はかなり複雑で省略し、ここではりの曲げに適用した最も単純な形（結果のみ）を示す。

上の解答に合わせ、実荷重をP、仮想荷重をP'とし、それぞれの荷重による曲げモーメントをM_P、$M_{P'}$とする。そのとき仮想荷重P'が作用する点の変位δは

$$P'\delta = \int \frac{M_P M_{P'}}{EI}dx \qquad (12)$$

で与えられる。また仮想モーメントをM'、それによる曲げモーメントを$M_{M'}$とすると、仮想モーメント$M_{M'}$が作用する点のたわみ角iは

$$M'i = \int \frac{M_P M_{M'}}{EI}dx \qquad (13)$$

となる。

現在の問題に適用すると、(12)式に(2)~(4)式を代入して

$$P'\delta_C = \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{Px\times P'(x-\ell/2)}{EI}dx = \frac{PP'}{EI}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\ell x^2}{4}\right]_{\ell/2}^{\ell} = \frac{5PP'\ell^3}{48EI} \qquad (14)$$

これより

$$\delta_C = \frac{5P\ell^3}{48EI} \qquad (15)$$

が解。

たわみ角は(2),(5),(6)式を(13)式に代入して

$$M'i_C = \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{Px\times M'}{EI}dx = \frac{PM'}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\ell/2}^{\ell} = \frac{3PM'}{8EI} \qquad (16)$$

これより

$$i_C = \frac{3PM'}{8EI} \qquad (17)$$

が解。

（参考）(14)式を見ると、両辺にP'があらわれている。したがって、(3)~(6)式の仮想荷重、仮想モーメントによる曲げモーメントを計算する際、単位荷重$P'=1$、単位モーメント$M'=1$を入れておけばより簡単になることが分かる。すなわち、単位荷重による曲げモーメントを$\overline{M_{P'}}$、単位モーメントによる曲げモーメントを$\overline{M_{M'}}$とすると

$$\delta = \int \frac{M_P \overline{M_{P'}}}{EI} dx \qquad (18)$$

$$i = \int \frac{M_P \overline{M_{M'}}}{EI} dx \qquad (19)$$

となる。$\overline{M_{P'}}$ 、$\overline{M_{M'}}$ は(3)~(6)式で $P'=1$ 、$M'=1$ としたもので、(12)、(13)式よりわずかに簡単になる。これを単位荷重の定理ともいう。

（参考２）上の(11)式と(14)式は基本的に同じである。エネルギ原理は教科書に述べられている以外にもいろいろあり、少しずつ条件も異なるが、兄弟のような関係にあり、特に線形弾性の範囲では同じ内容を指していることが多い。

問題 9.5　AB 方向に x_1 軸、C を原点に上方向に x_2 軸をとる。

AB 間：

$$M_1 = P(\ell - x_1)$$

$$U_1 = \int_0^\ell \frac{M_1^2}{2EI} dx_1 = \frac{P^2}{2EI} \int_0^\ell (\ell - x_1)^2 dx_1 = \frac{P^2}{2EI} \left[\ell^2 x_1 - \ell x_1^2 + \frac{x_1^3}{3} \right]_0^\ell = \frac{P^2}{2EI} \frac{\ell^3}{3}$$

BC 間：

$$M_2 = P\ell \qquad \text{（一様）}$$

$$U_2 = \frac{P^2 \ell^3}{2EI}$$

全体：

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P^2}{2EI} \frac{\ell^3}{3} + \frac{P^2 \ell^3}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \frac{4\ell^3}{3} = \frac{2P^2 \ell^3}{3EI}$$

カスティリアノの定理式（9.51）より

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4P\ell^3}{3EI}$$

問題 9.6　荷重 P が作用する 1 軸応力状態での応力 σ は

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad ①$$

また、x の距離にある断面の直径を d とすると、断面積は

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 \qquad ②$$

である。したがって図に斜線を施した厚さ dx の部分に蓄えられる弾性ひずみエネルギは式（9.6）より

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E} A\ell$$

となる。これに、①と②を代入すれば、

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E} Adx = \frac{\left(\frac{4P}{\pi d^2}\right)^2}{2E} \frac{\pi}{4} d^2 dx = \frac{2P^2}{\pi E d^2} dx \quad ③$$

となる。棒全体に蓄えられる弾性ひずみエネルギは棒全体にわたって積分することにより得られる。ここで、$d = d_1 + (d_2 - d_1)x/\ell$ であるのでこれを③式に代入し、積分すれば、棒全体に蓄えられる弾性ひずみエネルギが求まる。

$$U = \int_0^\ell dU = \frac{2P^2}{\pi E} \int_0^\ell \frac{dx}{d^2} = \frac{2P^2}{\pi E} \int_0^\ell \frac{dx}{\left(d_1 + \frac{(d_2 - d_1)x}{\ell}\right)^2}$$

$$= \frac{2P^2}{\pi E} \left[\frac{-\ell}{d_2 - d_1} \frac{1}{\left\{ d_1 + (d_2 - d_1)\frac{x}{\ell} \right\}} \right]_0^\ell = \frac{2P^2}{\pi E} \cdot \frac{\ell}{d_1 - d_2} \left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right] = \frac{2P^2}{\pi E} \frac{\ell}{d_1 d_2}$$

問題 9.7　部材 BC 間には曲げモーメントのみが作用する。したがって、曲げモーメント（M_1）によるひずみエネルギは式（9.20）より、以下のようになる。

$$M_1 = Px_1$$

$$U_1 = \int_0^b \frac{M_1^2}{2EI} dx_1 = \frac{P^2 b^3}{6EI}$$

また、部材 AB 間には曲げモーメントとねじりモーメントが作用する。よって、部材 AB におけるひずみエネルギは曲げモーメント（M_2）によるひずみエネルギとねじりモーメント（M_t）によるひずみエネルギの和となる。

$$M_2 = Px_2$$

$$M_t = Pb$$

$$U_2 = \int_0^a \frac{M_2^2}{2EI} dx_2 + \int_0^a \frac{M_t^2}{2GI_P} dx_2 = \frac{P^2 a^3}{6EI} + \frac{P^2 ab^2}{2GI_P}$$

したがって、部材全体のひずみエネルギは、$U = U_1 + U_2$ となる。

カスティリアノの定理（式（9.51）参照）より、C 点の鉛直変位は次のようになる。

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P(a^3 + b^3)}{3EI} + \frac{Pab^2}{GI_P}$$

問題 9.8　部材 AB の軸力を T_1、部材 BC の軸力を T_2 とすると、点 B に作用する力の水平方向のつ

りあいと鉛直方向のつりあいより、次の式が導かれる。

$$T_1 \cos\theta + T_2 = 0 \qquad ①$$

$$T_1 \sin\theta = P \qquad ②$$

これを、T_1、T_2について解くと

$$T_1 = \frac{P}{\sin\theta}、\quad T_2 = -\frac{P}{\tan\theta}$$

となる。トラス構造全体のひずみエネルギ U は部材 AB と BC とのひずみエネルギの和となり次式のようになる。

$$U = \int_0^{\ell_1} \frac{T_1^{\,2}}{2AE} dx + \int_0^{\ell_2} \frac{T_2^{\,2}}{2AE} dx = \frac{T_1^{\,2}\ell_1}{2AE} + \frac{T_2^{\,2}\ell_2}{2AE}$$

となる。ここで、l_1 と l_2 はそれぞれ部材 AB と BC の長さである。
弾性体のひずみエネルギをある荷重で偏微分すると、その荷重の作用点における荷重方向の変位が得られるというカスティリアノの定理（式（9.51）を参照）を用いると次式のようになる。

$$\delta_B = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{T_1^{\,2}\ell_1}{2AE} + \frac{T_2^{\,2}\ell_2}{2AE}\right) = \frac{T_1\ell_1}{AE}\cdot\frac{\partial T_1}{\partial P} + \frac{T_2\ell_2}{AE}\cdot\frac{\partial T_2}{\partial P}$$

上式に、$\ell_1 = \dfrac{\ell}{\cos\theta}$、$\ell_2 = \ell$ および $\dfrac{\partial T_1}{\partial P} = \dfrac{1}{\sin\theta}$、$\dfrac{\partial T_2}{\partial P} = -\dfrac{1}{\tan\theta}$ を代入すると、次式のように点 B の荷重方向の変位が求まる。

$$\delta_B = \frac{1}{AE}\cdot\frac{P}{\sin\theta}\cdot\frac{\ell}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{AE}\left(-\frac{P}{\tan\theta}\right)\ell\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right) = \frac{P\ell}{AE}\left(\frac{1+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\right)$$

問題 9.9　はりの AC 間と CB 間のひずみエネルギを求め､カスティリアノの定理を適用すればよい。この問題は例題 9.8 を参考にすれば分かりやすい。
それぞれの区間の曲げモーメントを M_1、M_2、弾性ひずみエネルギを U_1、U_2 とすると

$$M_1 = -R_A x + \frac{1}{2} f_0 x^2、\quad M_2 = -R_A x + \frac{f_0\ell}{3}\left(x - \frac{\ell}{3}\right)$$

となる。また、はり全体弾性ひずみエネルギは $U = U_1 + U_2$ となり、それぞれ区間の弾性ひずみエネルギは次のようになる。

$$U_1 = \frac{1}{2EI}\int_0^{\frac{\ell}{3}} M_1^{\,2} dx、\quad U_2 = \frac{1}{2EI}\int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} M_2^{\,2} dx$$

上式にカスティリアノの定理を適用すると、支点 A の反力 R_A による変位 δ_A が求まる。

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial U_1}{\partial R_A} + \frac{\partial U_2}{\partial R_A} = \frac{\partial U_1}{\partial M_1}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial R_A} + \frac{\partial U_2}{\partial M_2}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial R_A}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\ell}{3}} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial R_A} dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial R_A} dx\right\}$$

M_1、M_2の値および$\dfrac{\partial M_1}{\partial R_A}=\dfrac{\partial M_2}{\partial R_A}=-x$を代入し、また、A 点での境界条件$x=0$で$\delta_A=0$を用いると、次式のようになる。

$$\int_0^{\frac{\ell}{3}}\left(R_A x-\frac{1}{2}f_0 x^2\right)xdx+\int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell}\left\{R_A x-\frac{f_0\ell}{3}\left(x-\frac{\ell}{3}\right)\right\}xdx=0$$

これを整理すると$R_A=\dfrac{115}{648}f_0\ell$が求まる。

問題 9.10　(1)　曲げモーメントによる弾性ひずみエネルギは式（9.20）により、

$$U_B=\int_0^{\ell}\frac{M^2}{2EI}dx$$

となる。ここで、曲げモーメントは　$M=Px$であるので曲げモーメントによる弾性ひずみエネルギは

$$U_B=\frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}M^2dx=\frac{P^2\ell^3}{6EI}$$

となる。

また、ねじりモーメントによる弾性ひずみエネルギは式（9.12）により、

$$U_T=\int_0^{\ell}\frac{{M_t}^2}{2GI_P}dx$$

となる。ここで、ねじりモーメントは　$M_t=Ps$であり、ねじりモーメントによる弾性ひずみエネルギは

$$U_T=\frac{1}{2GI_P}\int_0^{\ell}{M_t}^2dx=\frac{P^2s^2\ell}{2GI_P}$$

となる。

(2)　片持ち梁であるので、A 点に単位の仮想横荷重を加えたときのモーメント分布は$\overline{M}=1\times x$。

一方、A 点に単位の仮想ねじりモーメントを加えたときのモーメント分布は$\overline{T}=1$。

y方向変位δは、

$$\delta=\frac{1}{EI}\int_0^{\ell}M\overline{M}dx=\frac{1}{EI}\int_0^{\ell}Px^2dx=\frac{P\ell^3}{3EI}$$

となる。

一方、ねじれ角ψは、

$$\psi=\frac{1}{GI_P}\int_0^{\ell}T\overline{T}dx=\frac{1}{GI_P}\int_0^{\ell}Psdx=\frac{Ps}{GI_P}\ell$$

となる。