演習問題 3 の解答

問題 3.1 の解答

長さl [m]のうどんの重さは,

$$W = \rho g A l \quad [\mathrm{N}] \tag{3.1.1}$$

で，根元に発生する応力は

$$\sigma = \frac{W}{A} = \rho g l \quad [\mathrm{N/m^2}] \tag{3.1.2}$$

となり，これが強さである。

材料が強い，もしくは軽ければ，自重で切れる長さが長くなる。式(3.1.2)を書き換えると,

$$l = \frac{\sigma}{\rho g}$$

となるが，これは強さを単位体積あたりの重さで割ったものである。これを比強度(Specific strength)といい，この値が大きければ，その材料は“軽くて強い”ということになる。

$$比強度 = \frac{強さ}{単位体積あたりの重さ}$$

問題 3.2 の解答

この問題は天井から吊るした場合と基本的に同じで、式(3.11)までそのまま成り立つ。ただし，式(3.7)のσ_0は

$$\sigma_0 = -\frac{mg}{A_0}$$

と読み替えなければならない。これは式(3.7)では引張応力を示しているのに対し，今回は圧縮応力が加わっているためである。

境界条件は，$(A)_{x=l} = A_0$，つまり

$$(A)_{x=l} = Cexp\left(\frac{\rho g l}{\sigma_0}\right) = A_0$$

より

$$C = A_0 exp\left(-\frac{\rho g l}{\sigma_0}\right)$$

となり，式(3.11)より断面積分布は最終的に

$$A = A_0 exp\left(-\frac{\rho g l}{\sigma_0}(x - l)\right)$$

と求められる。

問題 3.3 の解答

外力 P のうち，棒 1 を伸ばすのに必要な分をP_1，棒 2 を伸ばすのに必要な分をP_2とすると，

$$P_1 + P_2 = P \tag{3.3.1}$$

棒 1 と棒 2 の伸びは等しく，これをλとおくと，

$$\lambda = \frac{P_1}{E_1 A_1} l = \frac{P_2}{E_2 A_2} l \tag{3.3.2}$$

式(3.3.1)，式(3.3.2)より

$$(E_1 A_1 + E_2 A_2)\frac{\lambda}{l} = P$$

すなわち

$$\lambda = \frac{Pl}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

が解。

図 3.27 の 2 本の棒は荷重軸方向に並列に配置されているので、並列モデル(Parallel model)と呼ぶこともある。一方，図 3.9 のような配置は直列モデル(Series model)である。

問題 3.4 の解答

熱膨張係数α_1，α_2の関係を$\alpha_1 > \alpha_2$とすると，棒 1 のほうが多く伸びようとする。実際には束ねられているので，棒 1 は伸びが抑制される一方，棒 2 は伸ばされて，両方の伸びが同じになる。外力は作用していないので，棒 1 にかかる圧縮力と棒 2 にかかる引張力は等しく，正負のみ逆となる。式(3.30)より，圧縮方向を正とすると

$$\lambda_1 = -\frac{l}{E_1 A_1} P + \alpha_1 \Delta T l$$

$$\lambda_2 = \frac{l}{E_2 A_2} P + \alpha_2 \Delta T l$$

両方の伸び量は同じになるので，

$$-\frac{l}{E_1 A_1} + \alpha_1 \Delta T l = \frac{l}{E_2 A_2} + \alpha_2 \Delta T l$$

$$\left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}\right) P = (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T$$

$$P = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{\frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2}} = \frac{E_1A_1E_2A_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{E_1A_1 + E_2A_2}$$

これを式(3.30)に代入し，全体の伸び量をλとすると，

$$\lambda = (-\frac{l}{E_1A_1})\frac{E_1A_1E_2A_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T}{E_1A_1 + E_2A_2} + \alpha_1 \Delta T l$$

$$\lambda = -\frac{E_2A_2(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T l}{E_1A_1 + E_2A_2} + \alpha_1 \Delta T l$$

$$= \frac{E_1A_1\alpha_1 + E_2A_2\alpha_2}{E_1A_1 + E_2A_2}\,\Delta T l$$

これが全体の伸び量である。

問題 3.5 の解答

まず図 3A-1(a)において C 点での力のつり合いを考えると，

$$P_{AC} = \frac{1}{2}P, \qquad P_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}P \quad \text{（ともに引張り）}$$

となる。

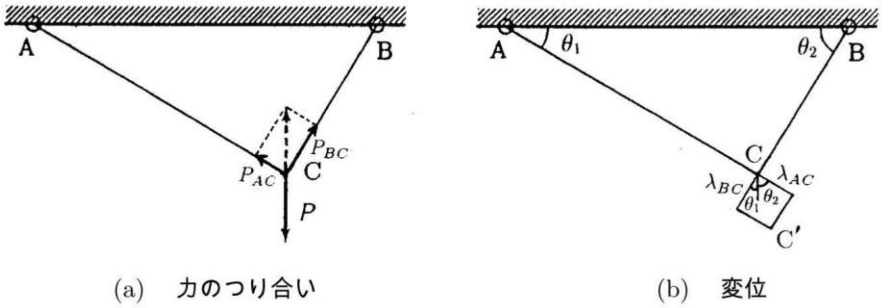

図 3A–1　トラス

次に変位を考える。AC= l，BC=$\sqrt{3}l$なので，

部材 AC の伸び：$\lambda_{AC} = \frac{P_{AC} \times \sqrt{3}l}{EA} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Pl}{EA}$

部材 BC の伸び：$\lambda_{BC} = \frac{P_{BC} \times l}{EA} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Pl}{EA}$

C 点の下方への移動量をδ_V，水平方向(右方向)への移動量をδ_Hとすると，

$$\delta_V = \lambda_{AC} cos\theta_2 + \lambda_{BC} cos\theta_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\frac{Pl}{EA}$$

$$\delta_H = \lambda_{AC} cos\theta_2 - \lambda_{BC} cos\theta_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\frac{Pl}{EA}$$

これが解となる。このように鉛直方向に引張っても，水平方向に変位が出るこ

とがある。

問題 3.6 の解答

このトラスの場合，接点 A に集まる部材 AB，AC の軸力から求めていく。

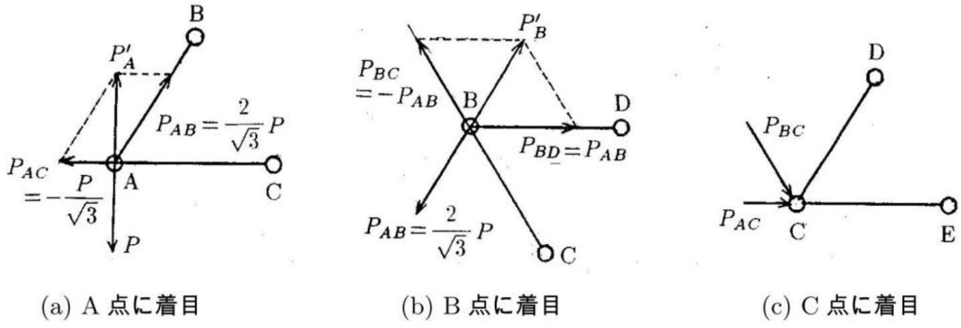

図 3A–2　トラスの軸力を順次解いていく

まず，図 3A-2(a)において接点 A に着目する。A 点でのつり合いを保つためには，外力 P に対して，大きさが等しく向きが反対の$\mathrm{P'_A}$が必要である。この力は部材 AB, AC より作り出されているので，P'_Aを AB, AC 方向に分解し，P_{AB}, P_{AC}を求める。ここで，部材 AB は接点 A を引き上げているので引張り，部材 AC は接点 A を左方向へ押しているので圧縮となっていることに注意する。

次に図 3A-2(b)で接点 B に着目する。接点 B はP_{AB}の力で左斜め下に引っ張られている。その力と部材 BC，BD に働く軸力がつり合う。この場合，部材 BC は圧縮，部材 BD は引張りとなる。

最後に図 3A-2(c)で接点 C について考える。ここでは図に示されているように部材 AC からP_{AC}，部材 BC からP_{BC}と，既知の力を受けている。なので，これとつり合うように部材 CD, CE に働く力を求めればよい。以下同じ手順である。

このように，ある接点に着目したとき，その接点に集まる部材のうち，軸力が未知のものは常に 2 本で，その方向への力の分解が可能である。これが静定トラスの方県である。それに対し，図 3A-3 では A 点に部材が 3 本集まっており，外力 P を分解することができず，不静定である。

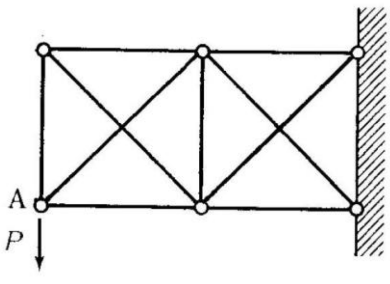

図 3A–3　不静定トラス

問題 3.7 の解答

楕円孔が開いていて，応力が加わっているので応力集中の問題である。応力集中係数 K は，式(3.45)より

$$K = 1 + 2\frac{b}{a}$$

今回，$\frac{b}{a} = 3$と与えられているので

$$K = 1 + 2 \times 3 = 7$$

破壊時の平均応力σ_nを求めるので，式(3.44)を変形して

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max}}{\mathrm{K}}$$

$$= \frac{500}{7} = 71.4 \ldots \cong 71[\mathrm{MPa}]$$

問題 3.8 の解答

累積損傷に関してはマイナー則より寿命を算出する。応力状態が 2 つの場合，式(3.49)より

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$$

ここで，n は与えた繰り返し荷重回数，N は寿命回数である。n_2を求めたいので、式(3.49)を変形して

$$n_2 = N_2(1 - \frac{n_1}{N_1})$$

今回$\mathrm{N}_1 = 1 \times 10^6$，$\mathrm{N}_2 = 5 \times 10^6$，$\mathrm{n}_1 = 3 \times 10^5$なので，代入して

$$n_2 = 5 \times 10^6 \left(1 - \frac{3 \times 10^5}{1 \times 10^6}\right)$$

$$= 3.5 \times 10^6$$

つまりσ_2を与える場合，あと 3500000 回使える。

問題 3.9 の解答

下図を解答とする。

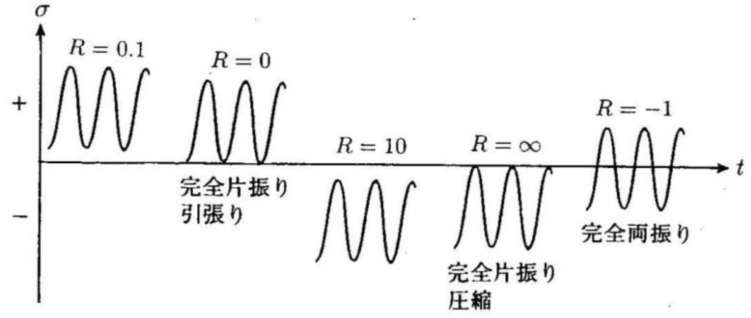

図 3A–4　くり返し負荷の形態