面積モーメントを用いた式（7.29）の証明

図 7.5(a)の左側の図において、はりのスパン AB に作用している荷重による曲げモーメントを $M'(x)$ とおき、A 点から右向きに x 軸を取ると x における曲げモーメントは

$$M(x) = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1})x/\ell_n + M'(x)$$

$$d^2v/dx^2 = -M/EI = -\{M_{n-1} + (M_n - M_{n-1})x/\ell_n + M'(x)\}$$

$$dv/dx == -\left\{M_{n-1}x + (M_n - M_{n-1})x^2/2\ell_n + \int_0^x M'(x)dx + C_1\right\}/EI \qquad (1)$$

$$v == -\left\{M_{n-1}x^2/2 + (M_n - M_{n-1})x^3/6\ell_n + \int_0^x\int_0^x M'(x)dxdx + C_1x + C_2\right\}/EI$$

境界条件　$x = 0, v = 0 \to C_2 = 0$　(2)

$$x = \ell_n, v = 0 \to M_{n-1}\ell_n{}^2/2 + (M_n - M_{n-1})\ell_n{}^2/6 + \int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx + C_1\ell_n = 0$$

から　$C_1 = -\left\{\ell_n{}^2(2M_{n-1} + M_n)/6 + \int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx\right\}/\ell_n$　(3)

(2)と(3)式を(1)に代入して

$$dv/dx == -\{M_{n-1}x + (M_n - M_{n-1})x^2/2\ell_n - [\ell_n{}^2(2M_{n-1} + M_n)/6 + \int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx]/\ell_n + \int_0^x M'(x)dx\}/EI$$

$x = \ell_n$ でのたわみ角は

$$\theta_n^R = (dv/dx)_{x=\ell_n} = -\ell_n(M_{n-1} + 2M_n)/6EI + \int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx]/EI\ell_n - \int_0^x M'(x)dx/EI \qquad (4)$$

次に図 7.5(b)の右側の図において、はりのスパン BC に作用している荷重による曲げモーメントを M'' とおき、B 点から右側に x 軸を取ると

$$M(x) = M_n + (M_{n+1} - M_n)x/\ell_{n+1} + M''(x)$$

$$dv/dx = -\left\{M_nx + (M_{n+1} - M_n)x^2/2\ell_{n+1} + \int_0^x M''(x) + C_3\right\}/EI \qquad (5)$$

$$v = -\left\{M_nx^2/2 + (M_{n+1} - M_n)x^3/6\ell_{n+1} + \int_0^x\int_0^x M''(x) + C_3x + C_4\right\}/EI$$

境界条件　$x = 0 : v = 0 \to C_4 = 0$　(6)

$x=\ell_{n+1}:v=0$ から

$$M_n\ell_{n+1}{}^2/2+\left(M_{n+1}-M_n\right)\ell_{n+1}{}^2/6+\int_0^{\ell n+1}\int_0^x M''(x)+C_3\ell_{n+1}=0$$

$$C_3=-\left(2M_n+M_{n+1}\right)\ell_{n+1}/6-\int_0^{\ell n+1}\int_0^x M''(x)/\ell_{n+1} \qquad (7)$$

(6)と(7)を(5)に代入し、 $x=0$ でのたわみ角を求めると

$$\theta_{n+1}^L=\left(dv/dx\right)_{x=0}=-C_3/EI=\left(2M_n+M_{n+1}\right)\ell_{n+1}/6EI+\int_0^{\ell n+1}\int_0^x M''(x)/EI\ell_{n+1} \quad (8)$$

$\theta_{\ell_n}^R=\theta_{\ell_{n+1}}^L$ の条件から、(4)=(8)から

$$-\ell_n\left(M_{n-1}+2M_n\right)/6EI+\int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx]/EI\ell_n-\int_0^x M'(x)dx/EI$$

$$\left(2M_n+M_{n+1}\right)\ell_{n+1}/6EI+\int_0^{\ell n+1}\int_0^x M''(x)/EI\ell_{n+1}$$

$$M_{n-1}\ell_n+2M_n\left(\ell_n+\ell_{n+1}\right)+M_{n+1}\ell_{n+1}=6\int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx]/\ell_n-6\int_0^x M'(x)dx$$

$$-6\int_0^{\ell n+1}\int_0^x M''(x)/\ell_{n+1} \qquad (9)$$

ここで、M' の囲む面積を $\int_0^{\ell n}M'(x)dx=A_n$, M'' の囲む面積を $\int_0^{\ell n+1}M''(x)dx=A_{n+1}$, とおき、A 点から M' の面積の図心位置を a_n 、B 点から M'' の面積の図心位置を b_{n+1} とおき、二重積分に部分積分を適用すると

$$\int_0^{\ell n}\int_0^x M'(x)dxdx=\int_0^{\ell n}A_n(x)dx=xA_n\Big|_0^{\ell n}-\int_0^{\ell n}xM'(x)dx=\ell_nA_n-\int_0^{\ell n}xM'(x)dx \qquad (10)$$

$$=\ell_nA_n-a_nA_n$$

$$\int_0^{\ell n+1}\int_0^x M''(x)dxdx=\int_0^{\ell n+1}A_{n+1}(x)dx=xA_{n+1}\Big|_0^{\ell n+1}-\int_0^{\ell n+1}xM''(x)dx=\ell_{n+1}A_{n+1}$$

$$-\int_0^{\ell n+1}xM''(x)dx=\ell_{n+1}\int_0^{\ell n+1}M''dx-\int_0^{\ell n+1}xM''(x)dx=\int_0^{\ell n+1}\left(\ell_{n+1}-x\right)M''(x)dx=b_{n+1}A_{n+1}$$

(11)

(10)と(11)を(9)に代入すると

$$M_{n-1}\ell_n+2M_n\left(\ell_n+\ell_{n+1}\right)+M_{n+1}\ell_{n+1}=6\left(\ell_nA_n-a_nA_n\right)/\ell_n-6A_n-6b_{n+1}A_{n+1}/\ell_{n+1}$$

最終的に教科書の式(7.29)が誘導される。

$$M_{n-1}\ell_n+2M_n\left(\ell_n+\ell_{n+1}\right)+M_{n+1}\ell_{n+1}=-6\left(a_nA_n/\ell_n+b_{n+1}A_{n+1}/\ell_{n+1}\right)$$