モールの応力円とひずみ円

電卓や計算器がなかった時代にはサイン関数などの関数を計算することは簡単ではなかったので，様々な分野で作図により数値を求めることが工夫された．材料力学でも応力を計算するのにモールの応力円と呼ばれる図的解法が示され，大いに利用されてきた．

2つの主応力σ_1, σ_2が分かっているとき，主応力面から反時計方向にθ_0傾いた面に働く垂直応力σ_nとせん断応力τ_nをモールの応力円を用いて求める方法を示そう。図a-1に示したように主応力面に働くせん断応力はゼロなので、三角関数の係数が正になるように，式(8.8)にあるσ_n，τ_nを整理すると

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos(-2\theta_0) \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin(-2\theta_0)\end{aligned} \tag{a}$$

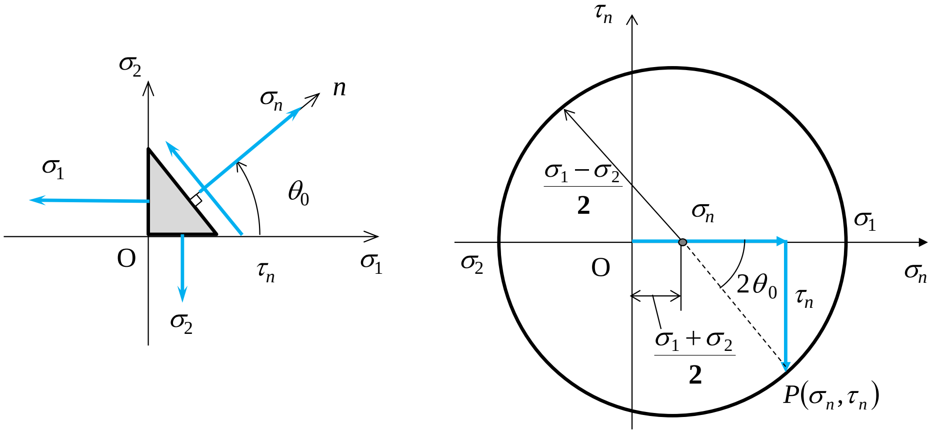
の様に示される。$\cos^2(-2\theta_0) + \sin^2(-2\theta_0) = 1$を用いると、

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau_n{}^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \tag{b}$$

が導かれる．中心(a,b)半径rの円の方程式が

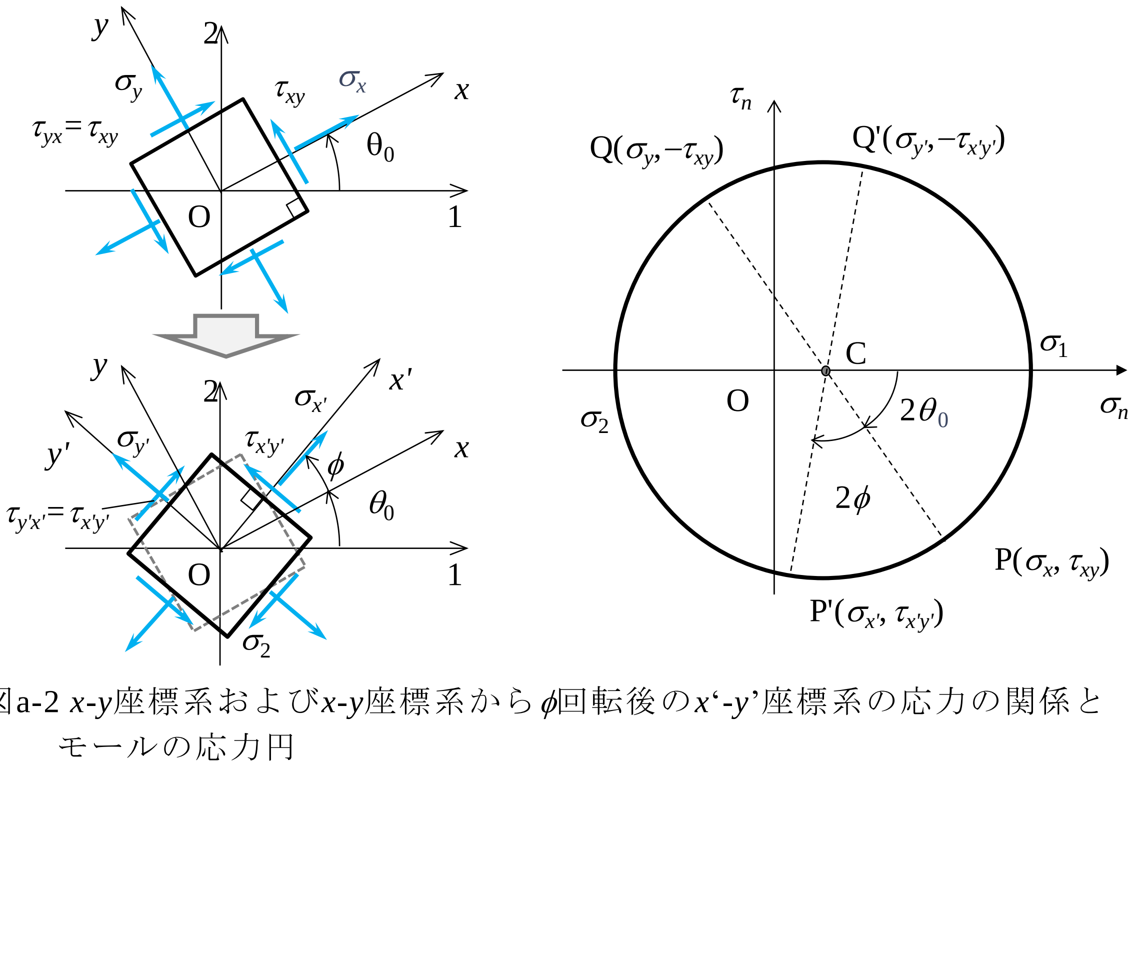
$$(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=r^2$$

と書けることを思い出してもらうと，(b)式をσ_n, τ_nに関する方程式と考え、σ_n, τ_nに関するグラフを描くと，図のように点P(σ_n, τ_n)は、中心（$\{\sigma_1+\sigma_2\}/2$, 0）で，半径$(\sigma_1-\sigma_2)/2$の円周上にあることが分かる．また，主軸σ_1と法線nがθ_0傾いた面上の応力が，モールの応力円周上でσ_n軸から時計方向に$2\theta_0$とった点になることも理解できよう。P点の水平方向の長さσ_nと垂直方向の長さτ_nを測ることにより任意方向の面に働く応力を導くことができる．（本例もそうであるが）図より負のτ_nが得られた時には，左図で面に働くせん断応力の方向が矢印と逆で微小要素を時計回りに回転しようとする作用になっていることを注意してもらいたい。考案者の名前をとって，この円をモール（Mohr）の応力円という。



図a-1　モールの応力円

図a-2に示した主軸と反時計回りにθ_0傾いたx-y座標系x-yとx-y座標系から反時計回りにϕ回転したx'-y'での応力を考えよう．x-y座標系でx軸に垂直な面での応力は，x軸からθ_0回転した面上の応力なのでモールの応力円では反時計回りに$2\theta_0$回転した点Pの座標となり，y軸に垂直な面の応力は，反時計回りに$2\theta_0$+180°回転した点，ちょうどP点の反対位置になる．この図ではσ_xは正，σ_y, τ_{xy}は負である．x-y座標系から反時計回りにϕ回転したx'-y'座標系での応力はさらに2ϕ回転した点P'およびQ'の点に対応し，それぞれの座標位置から応力成分を導くことができる．



図a-2 x-y座標系およびx-y座標系からϕ回転後のx‘-y’座標系の応力の関係とモールの応力円

工学せん断ひずみγ_{xy}のかわりに$\varepsilon_{xy}=\gamma_{xy}/2$を用いれば，ひずみの座標変換式は応力の座標変換式と同じで

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos(-2\theta_0)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos(-2\theta_0+\pi)$$
$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin(-2\theta_0)$$

となる。したがって、2つの主ひずみε_1, ε_2と主ひずみ方向が分かっているとき、x軸が主ひずみε_1軸から反時計方向にθ_0傾いている座標系でのひずみ成分ε_x, ε_y, $\gamma_{xy}/2$が、中心を$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$、半径$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2$の円周上で垂直ひずみ軸から時計回りに$2\theta_0$回転した直径上の両端点の座標として導かれる（図参照）。この円は、モールの応力円と同様な性質があり、モールのひずみ円と呼ばれる．