演習問題10 の解答

問題10.1 の解答

棒材料の単位体積あたりの重量（比重量）を q (N/mm³) とすると，下端から x の距離にある断面上の引張り応力は，

$$\sigma = \frac{qAx}{A} = qx \quad (\mathrm{N/mm^2})$$

となる。よって，下端から x の距離にある厚さ dx の微小体積要素に蓄えられる弾性ひずみエネルギは，

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E}Adx = \frac{q^2x^2}{2E}Adx$$

となる。したがって，この棒材に蓄えられる全弾性ひずみエネルギは，

$$U = \int_0^\ell dU = \frac{q^2A}{2E}\int_0^\ell x^2dx = \frac{q^2A\ell^3}{6E}$$

ここで，$q = \frac{mg}{Al}$ を代入すると，

$$U = \frac{\left(\frac{mg}{A\ell}\right)^2 A\ell^3}{6E} = \frac{m^2g^2\ell}{6AE}$$

問題10.2 の解答

(a)(b)(c) 棒の弾性ひずみエネルギをそれぞれ *Ua, Ub, Uc* とする。

$$U_a = \frac{\sigma^2}{2E}A\ell = \frac{\sigma_e^2}{2E}\frac{\pi}{4}(2d)^2 2\ell = \frac{\sigma_e^2\pi d^2\ell}{E}$$

ここで，σ_e は最大応力である。

(b) 棒では，仮定により応力集中はないものと考えられる。

直径 d の部分の応力は$P_b/\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)$となり，この応力が σ_e となる。直径 $2d$ の部分の応力は，

$P_b/\left(\frac{\pi}{4}(2d)^2\right)$となり，この部分の応力は $\sigma_e/4$ となる。よって，

$$U_a = \frac{\sigma^2}{2E}A\ell = \frac{\sigma_e^2}{2E}\frac{\pi}{4}(d)^2\ell + \frac{\left(\frac{\sigma_e}{4}\right)^2}{2E}\frac{\pi}{4}(2d)^2\ell$$

$$= \frac{5\sigma_e^2\pi d^2\ell}{32E}$$

$$U_c = \frac{\sigma^2}{2E} A\ell = \frac{\sigma_e^2}{2E}\frac{\pi}{4}(d)^2 2\ell = \frac{\sigma_e^2 \pi d^2 \ell}{4E}$$

大きさを比較すると,

$$U_a : U_b : U_c = 32 : 5 : 8$$

問題10.3 の解答

右端から x の距離にある断面の直径を d とすれば, この断面の断面積 A と, この断面に生じる応力 σ は，それぞれ

$$A = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\sigma = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

である。したがって図の厚さ dx の部分に蓄えられる弾性ひずみエネルギ dU は

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E} A dx = \frac{\left(\frac{4P}{\pi d^2}\right)^2}{2E} \frac{\pi}{4} d^2 dx = \frac{2P^2 dx}{\pi E d^2}$$

ここで,

$$d = d_1 + \frac{(d_2 - d_1)x}{\ell}$$

であるから，棒全体に蓄えられる弾性ひずみエネルギ U は

$$U = \int_0^\ell dU = \frac{2P^2}{\pi E}\int_0^\ell \frac{dx}{d^2} = \frac{2P^2}{\pi E}\int_0^\ell \frac{dx}{\left(d_1 + \frac{(d_2 - d_1)x}{\ell}\right)^2}$$

$$= \frac{2P^2}{\pi E}\left[\left(\frac{-\ell}{d_2 - d_1}\right)\frac{1}{\left\{d_1 + (d_2 - d_1)\frac{x}{\ell}\right\}}\right]_0^\ell$$

$$= \frac{2P^2}{\pi E}\frac{-\ell}{d_2 - d_1}\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right]_0^\ell$$

$$= \frac{2P^2}{\pi E}\frac{\ell}{d_1 d_2}$$

問題10.4 の解答

固定端 A より任意の距離 x の断面の曲げモーメントは

$$M_x = -R_A x + M_A + \frac{f_0}{2}x^2$$

支点のたわみおよび傾き角は 0 であるから，カスティリアノの定理より

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$$

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_x^2}{2EI} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial U}{\partial M_x}\frac{\partial M_x}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell} 2M_x \frac{\partial M_x}{\partial R_A} dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(-R_A x + M_A + \frac{f_0}{2}x^2\right)(-x)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{R_A}{3}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 - \frac{f_0}{8}x^4\right]_0^{\ell}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A}{3}\ell^3 - \frac{M_A}{2}\ell^2 - \frac{f_0}{8}\ell^4\right) = 0$$

$$8R_A\ell^3 - 12M_A\ell^2 - 3f_0\ell^4 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{\partial U}{\partial M_x}\frac{\partial M_x}{\partial M_A} = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell} 2M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_A} dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(-R_A x + M_A + \frac{f_0}{2}x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{R_A}{2}x^2 + M_A x + \frac{f_0}{6}x^3\right]_0^{\ell}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{R_A}{2}\ell^2 + M_A\ell + \frac{f_0}{6}\ell^3\right) = 0$$

$$M_A - \frac{R_A}{2}\ell + \frac{f_0}{6}\ell^2 = 0$$

$$6M_A - 3R_A\ell + f_0\ell^2 = 0 \qquad (b)$$

式(a)，(b)を連立して解くと

$$R_A = \frac{f_0}{2}\ell = R_B$$

$$M_A = \frac{f_0}{12}\ell^2 = M_B$$

問題10.5 の解答

左端から x をとり, C 点に単位の仮想荷重および仮想モーメントを加えたときの片持はりに生じる曲げモーメント M' および M'' は，それぞれ

$$M' = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2})$$

$$M' = \left(x - \frac{\ell}{2}\right) \quad (\frac{\ell}{2} \leqq x \leqq \ell)$$

$$M'' = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\ell}{2})$$

$$M'' = 1 \quad (\frac{\ell}{2} \leqq x \leqq \ell)$$

したがって求めるたわみ，およびたわみ角は

$$\delta = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{MM'}{EI} dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{MM'}{EI} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{Px \times 0}{EI} dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{Px \times \left(x - \frac{\ell}{2}\right)}{EI} dx$$

$$= \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

$$i = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{MM'}{EI} dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{MM'}{EI} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{Px \times 0}{EI} dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{Px \times 1}{EI} dx$$

$$= \frac{3P\ell^2}{8EI}$$

問題10.6 の解答

曲げひずみエネルギ U は

$$U=\frac{1}{2EI}\left\{\int_0^{\ell}(Px)^2dx+\int_0^{\ell}\left(P\ell\right)^2dx\right\}=\frac{1}{2EI}\left\{P^2\left(\frac{\ell^3}{3}+\ell^3\right)\right\}=\frac{4}{3}P^2\ell^3/2\mathrm{EI}$$

$$U=\frac{2}{3}\frac{P^2\ell^3}{EI}$$

また A 点の垂直たわみ δA は

$$\delta_A=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{2}{3}\frac{P^2\ell^3}{EI}\right)=\frac{4}{3}\frac{P\ell^3}{EI}$$

問題10.7 の解答

AB 部分は, 曲げモーメント $M_{AB}=Px_2$ と, ねじりモーメント $TAB=Pb$ が作用し，BC部分は，曲げモーメント $M_{CB}=Px_1$ のみが作用する。

この直角棒全体のひずみエネルギ U は

$$U=\int_0^a\frac{M_{AB}^2}{2EI}dx_2+\int_0^a\frac{T_{AB}^2}{2GI_P}dx_2+\int_0^b\frac{M_{CB}^2}{2EI}dx_1$$

$$=\frac{P^2a^3}{6EI}+\frac{P^2ab^2}{2GI_P}+\frac{P^2b^3}{6EI}$$

C 点の垂直変位 δC はカスティリアノの定理を用いると

$$\delta_C=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{p(a^3+b^3)}{3EI}+\frac{P^2ab^2}{GI_P}$$

問題10.8 の解答

部材 AB の軸力を T_1，部材 BC の軸力を T_2 とすると，力のつり合い条件より

$$T_1\cos\theta+T_2=0$$

$$T_1\sin\theta=P$$

これを，T_1, T_2 について解くと

$$T_1=\frac{P}{\sin\theta}$$

$$T_2=-\frac{P}{\tan\theta}$$

ひずみエネルギの式にカスティリアノの定理を適用し，T_1, T_2 を代入すると，

$$\delta_{\boldsymbol{B}} = \frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{T_1^2 \ell_1}{2AE} + \frac{T_2^2 \ell_2}{2AE}\right) = \frac{T_1 \ell_1}{AE}\frac{\partial T_1}{\partial P} + \frac{T_2 \ell_2}{AE}\frac{\partial T_2}{\partial P}$$

$$\ell_1 = \frac{\ell}{\cos\theta}$$

$$\ell_2 = \ell$$

および

$$\frac{\partial T_1}{\partial P} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial P} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

を代入すると,

$$\delta_{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{AE}\frac{P}{\sin\theta}\frac{\ell}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{AE}\left(-\frac{P}{\tan\theta}\right)\ell\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \frac{P\ell}{AE}\frac{1+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$$

問題10.9 の解答

はりを AC 間と CB 間に分け, それぞれの区間の曲げモーメントを $M_1, M_2,$ 弾性ひずみエネルギを U_1, U_2 とすれば

$$M_1 = -R_A x + \frac{1}{2} f_0 x^2$$

$$M_2 = -R_A x + \frac{f_0 \ell}{3}\left(x - \frac{\ell}{6}\right)$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = \frac{1}{2EI}\int_0^{\frac{\ell}{3}} M_1^2 dx$$

$$U_2 = \frac{1}{2EI}\int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} M_2^2 dx$$

支点 A の反力 R_A による変位　δA は

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial U_1}{\partial R_A} + \frac{\partial U_2}{\partial R_A} = \frac{\partial U_1}{\partial M_1}\frac{\partial M_1}{\partial R_A} + \frac{\partial U_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial R_A}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\ell}{3}} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial R_A} dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial R_A} dx\right\}$$

M_1, M_2 の値および

$$\frac{\partial M_1}{\partial R_A} = \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = -x$$

A 点での条件

$$X = 0 \text{ で} \delta_A = 0$$

とおくと,

$$\int_0^{\frac{\ell}{3}} \left(R_A x - \frac{1}{2} f_0 x^2\right) x dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} \left\{R_A x - \frac{f_0 \ell}{3}\left(x - \frac{\ell}{6}\right)\right\} x dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3} R_A x^3 - \frac{1}{8} f_0 x^4\right]_0^{\frac{\ell}{3}} + \left[\frac{1}{3} R_A x^3 - \frac{f_0 \ell}{9} x^3 + \frac{f_0 \ell^2}{36} x^2\right]_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} = 0$$

$$R_A = \frac{1}{216} f_0 \ell + \frac{1}{3} f_0 \ell - \frac{1}{12} f_0 \ell - \frac{1}{81} f_0 \ell + \frac{1}{108} f_0 \ell$$

$$R_A = \frac{163}{648} f_0 \ell$$

問題10.10 の解答

(1) 曲げモーメントとねじりモーメント分布は

曲げモーメント $M = Px$

ねじりモーメント $M_t = Ps$

となる。よって，弾性ひずみエネルギは

$$U_B = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell} M^2 dx = \frac{P^2 \ell^3}{6EI}$$

$$U_T = \frac{1}{2GI_P}\int_0^{\ell} M_t^2 dx = \frac{P^2 s^2 \ell}{2GI_P}$$

(2) 片持はりであるので,

A 点に単位の仮想横荷重を加えたときのモーメント分布　$\overline{\mathrm{M}} = 1 \cdot \mathrm{x}$

A 点に単位の仮想ねじりモーメントを加えたときのモーメント分布　$\overline{\mathrm{M_t}} = 1$

となり，変位とねじれ角は，次のようになる。

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell} M\,\overline{M}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell} P\,x^2 dx = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$\psi = \frac{1}{GI_P}\int_0^{\ell} M_t\,\overline{M_t}dx = \frac{1}{GI_P}\int_0^{\ell} P\,s dx = \frac{Ps}{GI_P}\ell$$