演習問題 11　の解答

問題 11.1　の解答

この柱の小さいほうの断面二次モーメントは

$$I = \frac{10 \times 8^3}{12} - \frac{6 \times 4^3}{12} = \frac{1184}{3} \times 10^{-8} (\mathrm{m}^3)$$

よって

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 1184 \times 10^{-8}}{4 \times 3 \times 10^2} = \frac{5920\pi^2}{3} = 19.5(\mathrm{kN})$$

問題 11.2　の解答

この柱の断面二次モーメントは

$$I = \frac{\pi \times 10^4}{64} (\mathrm{cm}^4)$$

よって

$$P_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} = 4\pi^2 \frac{80 \times 10^9}{5^2} (\frac{\pi}{64} 10^{-4}) = 2\pi^3 \times 10^4 = 620(\mathrm{kN})$$

$$\sigma_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{Al^2} = 4\pi^2 \frac{80 \times 10^9}{\pi \times 0.05^2 \times 5^2} (\frac{\pi}{64} 10^{-4}) = 8\pi^2 \times 10^6 = 79(\mathrm{MPa})$$

問題 11.3　の解答

座屈方程式は

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

したがって一般解は

$$v = C_1 \sin\left(\frac{\alpha x}{l}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\alpha x}{l}\right) + C_3 \left(\frac{x}{l}\right) + C_4$$

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} = (\frac{\alpha}{l}) C_1 \cos\frac{\alpha x}{l} - (\frac{\alpha}{l}) C_2 \sin\left(\frac{\alpha x}{l}\right) + \frac{C_3}{l}$$

境界条件を代入すると

$$x = 0 \text{ で} v = 0 \quad C_2 + C_4 = 0 \quad \text{(a)}$$

$$x = 0 \text{ で} \frac{dv}{dx} = 0 \quad \frac{\alpha}{l} C_1 + \frac{1}{l} C_3 = 0 \quad \text{(b)}$$

$$x = l \text{で} \frac{dv}{dx} = 0 \quad \frac{\alpha}{l} C_1 \cos\alpha - \frac{\alpha}{l} C_2 \sin\alpha + \frac{C_3}{l} = 0 \quad \text{(c)}$$

$$x = l \text{で} \frac{d^3v}{dx^3} = 0 \quad -(\frac{\alpha}{l})^3 C_1 \cos\alpha + (\frac{\alpha}{l})^3 C_2 \sin\alpha = 0 \quad \text{(d)}$$

(c)と(d)より　$C_3 = 0$

(b)より　$C_1 = 0$

(a)より　$C_2 = -C_4$

(c)より　$C_2 \sin\alpha = 0$

よって自明でない解を持つ条件は

$$\alpha = \pi n$$

となり、座屈荷重は *n=1* で

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

問題 11.4 の解答

曲げモーメントは

$$M = -EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

Pのつくるモーメントと釣り合うので、式(11.5)と(11.6)から

$$M(x) = -P(v_{max} - v)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = Pv_{max}$$

$$v = C_1 \sin\alpha\frac{x}{l} + C_2\cos\alpha\frac{x}{l} + v_{max}$$

境界条件は

$$x = 0 \text{ で} v = 0, k\frac{dv}{dx} = Pv_{max}$$

$$x = l \text{で} v = v_{max}$$

境界条件式に一般解を代入すると

$$C_2 + v_{max} = 0$$

$$k\left(\frac{\alpha}{l}\right)C_1 = Pv_{max}$$

$$C_1 \sin\alpha + C_2\cos\alpha = 0$$

$$\alpha \tan\alpha = \frac{kl}{EI}$$

$k \to \infty$ で$\alpha = \pi/2$ となり，片持ち柱の解になることがわかる。またEI に比べてk が小さくなると

$\alpha^2 = kl/EI$ より，$Pcr = k/l$ に近づき，11.1 節で変形しない棒のときの解に収

束していくことがわかる。

問題 11.5 の解答

この柱の断面積および断面二次モーメントは

$$A = 12 \times 8 - 11 \times 6 = 30 * 10^{-4}(\mathrm{m}^2)$$

$$I = \frac{12 \times 8^3}{12} - \frac{11 \times 6^3}{12} = 3.14 \times 10^{-6}(\mathrm{m}^4)$$

せん断変形を考えないときの座屈荷重は

$$\sigma_{cr0} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A} = \frac{\pi^2 E \times 3.14 \times 10^{-6}}{0.8^2 \times 30 \times 10^{-4}} = 1.6354 \times 10^{-3}\pi^2 E(\mathrm{Pa})$$

式(11.51)より、

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr0}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{cr0}}{G}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1.6354 \times 10^{-3}\pi^2 E}{\frac{E}{2+0.5}}}$$

$$= \frac{1}{1 + 2.5 \times 1.6354 \times 10^{-3}\pi^2} = 0.961$$

せん断変形を考えると約 4%座屈荷重が減少する

問題 11.6 の解答

σ_{cr} = 1974 *MPa* > *σY/2* なので塑性を考慮した式を用いる必要がある。両端固定円形断面はりなので

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{64\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$

式(11.53)で k=4 を用いて、

$$l_e = \frac{l}{2}$$

$$\sigma_{cr} = 400\left(1 - \frac{400}{4\pi^2 A \times 200000}\left(\frac{1}{0.025}\right)^2\right) = 400\left(1 - \frac{400 \times 1600}{4\pi^2 80000}\right)$$

$$= 400 \times 0.797 = 319(\mathrm{MPa})$$