演習問題 12 解答

問題 12.1 の解答

式 (12.24) より，最大応力は

$$(\sigma_\theta)\max = \frac{\rho r_2^2\omega^2(3+\nu)}{4}\left\{1+\frac{1-\nu}{3+\nu}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{7.8\times10^3\times0.25^2\left\{4000\times\left(\frac{2\pi}{60}\right)\right\}^2(3+0.3)}{4}\left\{1+\frac{1-0.3}{3+0.3}\left(\frac{0.025}{0.25}\right)^2\right\}$$

$$= 70.72\times10^6(\mathrm{Pa}) = 70.72(\mathrm{MPa})$$

問題 12.2 の解答

式 (12.29)で $v = r_2\omega$ として，限界周速度は

$$v = r_2\omega = \sqrt{\frac{8(\sigma_\theta)\max}{(3+v)\rho}} = \sqrt{\frac{8\times20\times10^6}{(3+0.3)\times8.83\times10^3}} = 74.10\ (\mathrm{m/s})$$

問題 12.3 の解答

$\sigma_a = (\sigma_\theta)\max$ とすれば，式 (12.47) より，最大内圧力は

$$P_1 = \frac{\left(r_2^2-r_1^2\right)(\sigma_\theta)\max}{r_2^2+r_1^2}$$

$$= \frac{(0.13^2-0.1^2)}{(0.13^2+0.1^2)}\times50\times10^6 = 12.8\times10^6(\mathrm{Pa}) = 12.8\ (\mathrm{MPa})$$

問題 12.4 の解答

薄肉円筒のときに生じる最大応力 $(\sigma_\theta)'\max$ は

$$(\sigma_\theta)'_{\max} = \frac{p_1r_1}{r_2-r_1} = \frac{p_1}{n-1}$$

厚肉円筒のときに生じる最大応力 $(\sigma_\theta)\max$ は，式 (12.47) より

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{(r_1^2+r_2^2)p_1}{r_2^2-r_1^2} = \frac{\left\{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2+1\right\}p_1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-1} = \frac{(n^2+1)p_1}{n^2-1}$$

よって，

$$\frac{(\sigma_\theta)_{\max}}{(\sigma_\theta)'_{\max}} = \frac{n^2+1}{n+1}$$

問題 12.5 の解答
式 (12.60) より，焼きばめしろは

$$\delta = \frac{4p_m}{E}\frac{r_2^3\left(r_3^2 - r_1^2\right)}{\left(r_3^2 - r_2^2\right)\left(r_2^2 - r_1^2\right)} = \frac{4 \times 20 \times 10^6}{206 \times 10^9} \times \frac{0.06^3 \times \left(0.07^2 - 0.05^2\right)}{\left(0.07^2 - 0.06^2\right)\left(0.06^2 - 0.05^2\right)}$$

$$= 0.141 \times 10^{-3}(\mathrm{m}) = 0.141\ (\mathrm{mm})$$

問題 12.6 の解答
(1) 外筒について，式 (12.61) より

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_{\theta 2}^{'} + \sigma_{\theta 2}^{''} = \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}p_m + \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_1^2}\left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_1^2}{r_3^2}\right)p_1$$

$$= \frac{0.12^2 + 0.11^2}{0.12^2 - 0.11^2} \times 20 \times 10^6 + \frac{0.12^2}{0.12^2 - 0.10^2}\left(\frac{0.10^2}{0.11^2} + \frac{0.10^2}{0.12^2}\right) \times 50 \times 10^6$$

$$= 479 \times 10^6(\mathrm{Pa}) = 479\ (\mathrm{MPa})$$

(2) 内筒について，式 (12.62) より

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 1}^{'} + \sigma_{\theta 1}^{''} = -\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}p_m + \frac{r_3^2 + r_1^2}{r_3^2 - r_1^2}p_1$$

$$= -\frac{2 \times 0.11^2}{0.11^2 - 0.10^2} \times 20 \times 10^6 + \frac{0.12^2 + 0.10^2}{0.12^2 - 0.10^2} \times 50 \times 10^6$$
$$= 46.8 \times 10^6(\mathrm{Pa}) = 46.8\ (\mathrm{MPa})$$

問題 12.7 の解答
式 (12.47)，式 (12.78) より，厚肉円筒と厚肉球の最大応力は

$$(\sigma_\theta)_{max} = \frac{\left(r_1^2 + r_2^2\right)p_1}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{1 + n^2}{1 - n^2}p_1$$

$$\sigma_{max} = \frac{r_2^3 + 2r_1^3}{2(r_2^3 - r_1^3)}p_1 = \frac{1 + 2n^3}{2(1 - n^3)}p_1$$

$$\frac{(\sigma_\theta)_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{1 + n^2}{1 - n^2} \times \frac{2(1 - n^3)}{1 + 2n^3} = \frac{1 + 0.7^2}{1 - 0.7^2} \times \frac{2(1 - 0.7^3)}{1 + 2 \times 0.7^3} = 2.28$$

問題 12.8 の解答
式 (12.78) より，最大圧力は

$$p_1 = \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^3 + 2r_1^3}\sigma_{max} \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{2\left(0.14^3 - 0.08^3\right)}{0.14^3 + 2 \times 0.08^3} \times 300 \times 10^6 \times \frac{1}{3}$$
$$= 118 \times 10^6 (\mathrm{Pa}) \;=\; 118\ (\mathrm{MPa})$$

問題 12.9 の解答

式 (12.84) より，板厚は

$$t = \sqrt{\frac{3(3+\nu)}{8 \times \sigma_{max}} p_0} \times a$$

$$= \sqrt{\frac{3(3+0.2)}{8 \times 600 \times 10^6} \times 20 \times 10^6} \times 0.1 = 0.02(\mathrm{m}) = \ 20\ (\mathrm{mm})$$

問題 12.10 の解答

式 (12.82) を順次積分すれば w は次式となる

$$w = \frac{1}{D}\left(\frac{p}{64}r^4 + C_1 r^2 + C_2 + C_3 r^2 \log r + C_4 \log r\right)$$

ただし，等分布荷重は作用していないので，上式において $p = 0$ とすると

$$w = \frac{1}{D}(C_1 r^2 + C_2 + C_3 r^2 \log r + C_4 \log r)$$

また，中心のたわみは有限なので，$C_4=0$ としなければならない。一方，式 (12.79) に式 (12.80)を代入すれば次式を得る。

$$Q = -D\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$= -D\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right\}$$

この式に上式 w を代入して

$$Q = \frac{4C_3}{r}$$

半径 r における全円周のせん断力 Q と集中荷重 P とのつり合いから，

$$P + 2\pi r Q = 0$$

$$\therefore\ C_3 = \frac{P}{8\pi}$$

したがって，w に関する上式は

$$w = \frac{1}{D}\left(C_1 r^2 + C_2 + \frac{P}{8\pi}r^2 \log r\right)$$

境界条件として，$r = a$ のとき $w = 0$ および $M_\theta = 0$ を上式と式 (12.80) に代

入して連立すれば

$$C_1 = -\frac{P}{16}\left(2\log a + \frac{3+\nu}{1+\nu}\right)$$

$$C_2 = \frac{Pa^2}{16\pi}\frac{3+\nu}{1+\nu}$$

これらを式 (12.80) に代入すれば，M_θと M_r は次式となる。

$$M_\theta = \frac{P}{4\pi}(1+\nu)\log\frac{a}{r}$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left\{(1+\nu)\log\frac{a}{r} + (1-\nu)\right\}$$

らに平面応力状態の円周方向応力 σ_θと半径方向応力 σ_rは，式 (12.15)，式 (12.16) より

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) = -\frac{E_z}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = \frac{12M_\theta}{t^3}z$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) = -\frac{E_z}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) = \frac{12M_r}{t^3}z$$

よって σ_θ と σ_r は次式より求められる。

$$\sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{t^3}z = \frac{12z}{t^3}\frac{P}{4\pi}(1+\nu)\log\frac{a}{r}$$

$$= \frac{12Pz}{4\pi t^3}(1+\nu)$$

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{t^3}z = \frac{12z}{t^3}\frac{P}{4\pi}\left\{(1+\nu)\log\frac{a}{r} + (1-\nu)\right\}$$

$$= \frac{12Pz}{4\pi t^3}\left\{(1+\nu)\log\frac{a}{r} + (1-\nu)\right\}$$