演習問題7の解答

問題7.1 の解答

$x=\frac{1}{2}l$ で対称であるから

$$R_A=R_B=\frac{P}{2},\qquad M_A=M_B$$

$0<x<l/2$ で x の位置での曲げモーメント M は

$$M=M_A-\frac{1}{2}Px$$

たわみ式は

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{1}{EI}\left(M_A-\frac{1}{2}Px\right)$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}Px^2+M_Ax+C_1\right)$$

$$v=-\frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{12}Px^3+\frac{1}{2}M_Ax^2+C_1x+C_2\right)$$

ここで，$x=0$ で，$\frac{dv}{dx}=0$ より，$C_1=C_2=0$，また，$x=\frac{1}{2}l$ で，$\frac{dv}{dx}=0$ より

$$-\frac{1}{16}Pl^2+\frac{1}{2}M_Al=0,\qquad M_A=M_B=\frac{1}{8}Pl$$

よって，$\frac{dv}{dx}=0$ でたわみが最大であり，その値 $v_{\max}$ は

$$v_{\max}=-\frac{Pl^3}{192EI}$$

となる。最大たわみは，単純支持はりが中央に集荷重をうける場合の 1/4 となっている。

問題7.2 の解答

はり全体のつり合いから

$$R_A+R_B=P$$

$$R_Al+M_B-Pl_2=0$$

この不静定はりの問題を図(a)，(b)のはりの重ね合わせの問題として解く。

(a)の場合の A 点のたわみ v_a は

$$v_a = \frac{R_A l^3}{3EI}$$

(b)の場合の A 点のたわみ v_b は

$$v_b = -\frac{P(3l - l_2)l_2^{\ 2}}{6EI}$$

(a)と(b)の場合を重ね合わせたときの A 点のたわみは 0 であることから

$$v_a + v_b = 0, \qquad R_A = \frac{Pl_2^{\ 2}(3l - l_2)}{2l^3}$$

$$R_B = P - \frac{Pl_2^{\ 2}(3l - l_2)}{2l^3} = \frac{P\left(2l^3 - 3ll_2^{\ 2} + l_2^{\ 3}\right)}{2l^3}$$

また

$$M_B = Pl_2 - R_A l = \frac{Pl_2\left(2l^2 - 3ll_2 + l_2^{\ 2}\right)}{2l^2} = \frac{Pl_1\left(l^2 - l_1^{\ 2}\right)}{2l^2}$$

となる。これより，たわみ角，たわみを求めることができる。

問題7.3 の解答

支点 A，C のモーメントは

$$M_A = M_C = 0$$

である。図の連続はりに 3 モーメントの式を用い，また面積モーメント法を適用すると

$$2M_B(l_1 + l_2) = \frac{f_0 l_1^{\ 3}}{4} + \frac{Pb}{l_2}\left(l_2^{\ 2} - b^2\right)$$

$$8M_B = \frac{60 \times 10^3 \times 2^3}{4} + \frac{50 \times 10^3 \times 0.5\left(2^2 - 0.5^2\right)}{2}$$

$$M_B = 20.9\,\mathrm{kN \cdot m}$$

はり AB の支点 B に関するモーメントのつり合いから

$$R_A l_1 - \frac{f_0 l_1^{\ 2}}{2} + M_B = 0$$

$$R_A = \frac{1}{l_1}\left(\frac{f_0 l_1^{\ 2}}{2} - M_B\right)$$

$$R_A = \frac{1}{2}\left(\frac{60\times10^3\times2^2}{2} - 20.9\times10^3\right)$$

$$R_A = 50\,\mathrm{kN}$$

となる。はり BC の支点 B に関するモーメントのつり合いから

$$R_C l_2 - (l_2 - b)P + M_B = 0$$

$$R_C = \frac{1}{l_2}\{(l_2 - b)P - M_B\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1.5\times50\times10^3 - 20.9\times10^3\}$$

$$R_C = 27.1\,\mathrm{kN}$$

y 方向の力のつり合いから

$$R_A + R_B + R_C = 60\times10^3\times2 + 50\times10^3 = 170\times10^3$$

$$R_B = (170 - 50 - 27.1)\times10^3 = 92.9\,\mathrm{kN}$$

答　$M_B = 20.9\,\mathrm{kN\cdot m},\quad R_A = 50\,\mathrm{kN},\quad R_B = 92.9\,\mathrm{kN},\quad R_C = 27.1\,\mathrm{kN},$

問題7.4の解答

曲げモーメント M は

$$M = \frac{f_0 x^2}{2}$$

長方形断面の幅 b，高さ h とすれば，曲げ応力 σ は

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{3f_0x^2}{bh^2}$$

これが一定となるには，幅 b を一定とすれば， $x^2/h^2 =$ 一定，高さ h は三角形状となる。

また，高さ h を一定，すなわち幅 b は x^2 に比例した断面形状となる。

問題7.5 の解答

曲げモーメント M は

$$M = Px$$

断面二次モーメントは

$$I=\frac{b_0h^3}{12}$$

曲げ応力 σ は

$$\sigma=\frac{6Px}{b_0h^2}$$

また，固定端 $x=l$ の曲げ応力 σ_l は

$$\sigma_l=\frac{6Pl}{b_0{h_l}^2}$$

$\sigma=\sigma_l$ から

$$h=h_l\sqrt{\frac{x}{l}}$$

　はりの高さ h が放物線状に変化すると，等強度はりとなる。次に断面二次モーメントは，l の位置の値を I_l とすれば，

$$I=\frac{b_0h^3}{12}=\frac{b_0{h_l}^3}{12}\left(\sqrt{\frac{x}{l}}\right)^3=\frac{I_lx}{l}\sqrt{\frac{x}{l}}$$

はりのたわみの式は

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{Pxl}{EI_lx}\sqrt{\frac{l}{x}}=-\frac{Pl^{\frac{3}{2}}}{EI_l\sqrt{x}}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{Pl^{\frac{3}{2}}}{EI_l}\left(2x^{\frac{1}{2}}+C_1\right)$$

$$v=-\frac{Pl^{\frac{3}{2}}}{EI_l}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1x+C_2\right)$$

$x=l$ で，$dv/dx=v=0$ より

$$C_1=-2\sqrt{l},\qquad C_2=\frac{2}{3}l^{\frac{3}{2}}$$

$$v=-\frac{Pl^{\frac{3}{2}}}{EI_l}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{l}x+\frac{2}{3}l^{\frac{3}{2}}\right)$$

$x=0$ のときの最大たわみ $v_{\max}$ は

$$v_{\max} = -\frac{12Pl^{\frac{3}{2}}}{Eb_0 h_l^{\,3}} \times \frac{2}{3} l^{\frac{3}{2}} = -\frac{8Pl^3}{Eb_0 h_l^{\,3}}$$

となる。断面の幅 b_0，高さ h_l の一様な断面の場合のたわみは $-4Pl^3 / Eb_0 h_l^{\,3}$ であり，平等強さはりの場合は 2 倍となる。

問題7.6 の解答

はり上端から材料(1)，材料(2)それぞれの中立軸までの距離を y_1，y_2，はり全体の中立軸までの距離を h_1 とすると h_1 は

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{E_1 y_1 A_1 + E_2 y_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \\ &= \frac{(70\times10^3\ \mathrm{MPa})(5\ \mathrm{mm})(1000\ \mathrm{mm}^2) + (10\times10^3\ \mathrm{MPa})(60\ \mathrm{mm})(10000\ \mathrm{mm}^2)}{(70\times10^3\ \mathrm{MPa})(1000\ \mathrm{mm}^2) + (10\times10^3\ \mathrm{MPa})(10000\ \mathrm{mm}^2)} \\ &= 37.4\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 37.4\ \mathrm{mm}, \qquad h_2 = 72.6\ \mathrm{mm} \\ \bar{y}_1 &= 32.4\ \mathrm{mm}, \qquad \bar{y}_2 = 22.6\ \mathrm{mm} \end{aligned}$$

次に中立軸に関する断面二次モーメントは，平行軸の定理を用いて，

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{bt_1^{\,3}}{12} + A_1 \bar{y}_1^{\,2} \\ &= \frac{(100\times10^{-3}\ \mathrm{m})(10\times10^{-3}\ \mathrm{m})^3}{12} + (100\times10^{-3}\times10\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2)\times(32.4\times10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \\ &= 1.058\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4 \end{aligned}$$

同様に

$$I_2 = 13.44\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4, \qquad I_Z = I_1 + I_2 = 14.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2} E_i I_i &= E_1 I_1 + E_2 I_2 \\ &= 70\times10^9 \times 1.058\times10^{-6} + 10\times10^9 \times 13.44\times10^{-6} \\ &= 208.5\ \mathrm{kN\cdot m^2} \end{aligned}$$

したがって，曲げ応力は，それぞれの材料について

$$\sigma_i = \frac{E_i y}{\rho} = \frac{E_i M}{E_1 I_1 + E_2 I_2} y$$

が得られ

$$\sigma_1 = \frac{(4\,\mathrm{kN\cdot m})(70\times10^6\ \mathrm{k\,N/m^2})(37.4\times10^{-3}\ \mathrm{m})}{208.5\,\mathrm{kN\cdot m}}$$
$$= 50.2\times10^3\ \mathrm{k\,N/m^2} = 50.2\,\mathrm{MPa}$$
$$\sigma_2 = \frac{(4\,\mathrm{kN\cdot m})(10\times10^6\ \mathrm{k\,N/m^2})(-72.6\times10^{-3}\ \mathrm{m})}{208.5\,\mathrm{kN\cdot m}}$$
$$= -13.9\,\mathrm{MPa}$$

問題7.7 の解答

図(a)に示すように部材 AB の中点 G に荷重 P が作用する単純支持はり AB の点 A，B における角度θ_1は

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

となる。しかし，部材 AB 間には，図(b)に示すように逆向きに，曲げモーメント M が誘起し，AB 間に一様に分布する。このときの点 A，B における角度θ_2は

$$\theta_2 = \frac{Ml}{2EI}$$

となる。したがって部材 AB の点 A における角度θは

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

となる。一方，部材 AC，BD 間には曲げモーメント M が誘起するので，部材 AC，BD 間における点 A，B の角度θ_3は

$$\theta_3 = \frac{Ml}{2EI}$$

となり，図(c)に示すように$\theta = \theta_3$となる。したがって，

$$\frac{Pl^2}{16EI} - \frac{Ml}{2EI} = \frac{Ml}{2EI} \qquad \therefore M = \frac{Pl}{16}$$

問題7.8の解答

長方形断面の図心C_0を通る y，z 軸に関する断面二次モーメントI_y，I_Zは

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6\cdot4^3}{12} = 32\,\mathrm{cm}^4, \qquad I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4\cdot6^3}{12} = 72\,\mathrm{cm}^4$$

ここで，長方形断面は y，z 軸で対称であるので，$I_{yz} = 0$，したがって，Y，Z

軸に関する断面二次モーメント I_Y，　I_Z，　I_{YZ} は

$$I_Y = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\theta - I_{yz}\sin 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}(32+72) + \frac{1}{2}(32-72)\cos(2\cdot 30°) - 0 = 42.0\,\mathrm{cm}^4$$

$$I_Z = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\theta + I_{yz}\sin 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}(32+72) - \frac{1}{2}(32-72)\cos(2\cdot 30°) + 0 = 62.0\,\mathrm{cm}^4$$

$$I_{YZ} = \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\theta + I_{yz}\cos 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}(32-72)\sin(2\cdot 30°) + 0 = -17.3\,\mathrm{cm}^4$$

問題7.9の解答

断面積 A は

$$A = l_1 \cdot t + (l_2 - t)t$$
$$= 8\cdot 1 + (10-1)\cdot 1 = 17.0\,\mathrm{cm}^2$$

Y, Z 軸に関する断面一次モーメント S_Y，　S_Z は

$$S_Y = \frac{t\cdot l_1^{\,2}}{2} + \frac{(l_2 - t)t^2}{2} = \frac{1\cdot 8^2}{2} + \frac{(10-1)\cdot 1^2}{2} = 36.5\,\mathrm{cm}^3$$
$$S_Z = \frac{(l_1 - t)t^2}{2} + \frac{t\cdot l_2^{\,2}}{2} = \frac{(8-1)\cdot 1^2}{2} + \frac{1\cdot 10^2}{2} = 53.5\,\mathrm{cm}^3$$

図心 C_0 の位置 $\bar{y}$，　$\bar{z}$ は

$$\bar{y} = \frac{S_Z}{A} = \frac{53.5}{17} = 3.15\,\mathrm{cm}$$
$$\bar{z} = \frac{S_Y}{A} = \frac{36.5}{17} = 2.15\,\mathrm{cm}$$

図心 C_0 を通る y, z 軸に関する断面二次モーメント I_y，I_Z と断面相乗モーメント

I_{yz} は

$$I_y = I_Y - \bar{z}^2 A = \frac{tl_1^{\,3}}{3} + \frac{(l_2 - t)t^3}{3} - \bar{z}^2 A$$
$$= \frac{1\cdot 8^3}{3} + \frac{(10-1)\cdot 1^3}{3} - 2.15^2 \times 17.0 = 95.08\,\mathrm{cm}^4$$

$$I_z = I_Z - \bar{y}^2 A = \frac{(l_1 - t)t^3}{3} + \frac{tl_2^{\,3}}{3} - \bar{y}^2 A$$
$$= \frac{(8-1)\cdot 1^3}{3} + \frac{1\cdot 10^3}{3} - 3.15^2 \times 17.0 = 167.0\,\mathrm{cm}^4$$

$$I_{yz} = I_{YZ} - \bar{y}\bar{z}A = \frac{l_1^{\,2}t^2}{4} + \frac{l_2^{\,2}t^2}{4} - \frac{t^4}{4} - \bar{y}\bar{z}A$$
$$= \frac{t^2}{4}\left(l_1^{\,2} + l_2^{\,2} - t^2\right) - \bar{y}\bar{z}A$$
$$= \frac{1^2}{4}\left(8^2 + 10^2 - 1^2\right) - 3.15 \times 2.15 \times 17.0 = -74.4\,\mathrm{cm}^4$$

断面の主軸が z 軸となす角を θ とすれば

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{-2\cdot 74.4}{167.0 - 95.08} = -32.1$$
$$\therefore \theta_1 = 32.1^\circ, \qquad \theta_2 = 57.9^\circ$$

よって，z 軸から時計方向に $\theta_1 = 32.1^\circ$ 回転した Z 軸が最大主断面二次モーメント I_1 の軸であり，これに垂直な $\theta_2 = 57.9^\circ$ の Y 軸が最小主断面二次モーメント I_2 の軸である。

問題7.10の解答

y，z 軸に関する長方形断面の断面二次モーメント I_y，I_Z

$$I_y = \frac{hb^3}{12}, \qquad I_Z = \frac{bh^3}{12}$$

また，中立軸から最も離れた断面上における点は，AB である。最大曲げモーメントは固定端に生じ，曲げモーメントの正は図 7.22 のようにとれば

$$M = -Pl$$

である。これを両主軸方向の成分に分解すると，

$$M_y = -Pl\sin\theta, \qquad M_z = -Pl\cos\theta$$

となる。最大引張応力は点 A に，最大圧縮応力は点 C に誘起し，両者の絶対値

は等しい。したがって最大引張応力$\sigma_{\max}$は，式(7.73)で，$y = h/2, z = -b/2$とおいて，

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{(-Pl\sin\theta)\left(-\frac{b}{2}\right)}{\frac{hb^3}{12}} - \frac{(-Pl\sin\theta)\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{bh^3}{12}}$$

$$= \frac{6Pl}{bh}\left(\frac{\sin\theta}{b} + \frac{\cos\theta}{h}\right)$$

また，中立軸の方向は，式(7.76)より

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{hb^3}{12}}\tan\theta = \frac{h^2}{b^2}\tan\theta$$

となる。