

演習問題9 の解答

問題 9.1 の解答

式(9.2)より

$$S = \frac{\sigma_t}{\sigma_a}$$

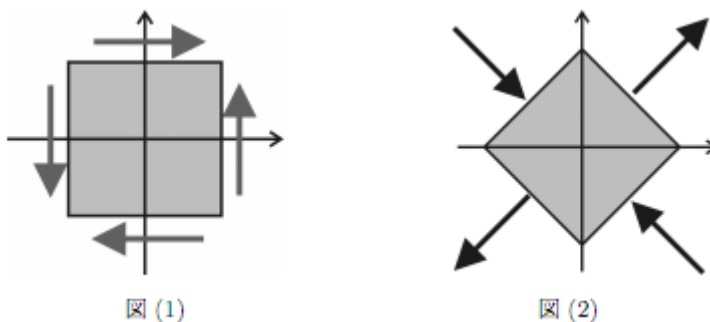
に与えられた値を代入すると

$$\sigma_a = \frac{450}{5} = 90 \quad [\text{MPa}]$$

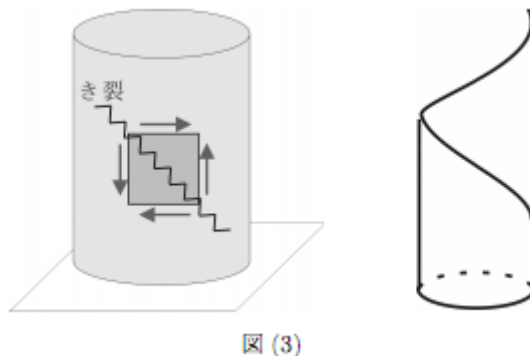
問題 9.2 の解答

(1)引張荷重を作用させた場合、丸棒の破面が軸に垂直な平面であったことから、この材料の破壊基準として最大主応力説が適応できると考えられる。

純粋なねじりの場合、表面応力状態は図(1)のようにせん断応力が働く。応力の座標変換を行うと図(2)の応力状態と等価であることがわかる。(詳しいやり方は 9.4 で)



したがって、最大主応力面で亀裂が入るため、軸に対して 45° の破面を形成する。この現象がすべての面で起こるため、らせん状にねじれた図(3)のような破面となる。



(2)前の(1)より丸棒の降伏応力 σ_{ult} は次のようにあらわすことができる。

$$\sigma_{ult} = \frac{P}{A} = \frac{P_{max}}{\pi d^2/4}$$

また、トルク T が作用した場合、棒の外周に働くせん断応力 τ_0 は式(4.16)より

$$\tau_0 = \frac{T}{I_p} \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{T}{\pi d^4/32} \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{16T}{\pi d^3}$$

と求めることができる。これより、最大主応力 σ_1 より次の関係式が得られる。

$$\sigma_1 = \tau_0 = \frac{16T}{\pi d^3} = \sigma_{ult} = \frac{P_{max}}{\pi d^2/4}$$

よって、トルク T は

$$\frac{16T}{\pi d^3} = \frac{P_{max}}{\pi d^2/4}$$

$$T = \frac{d}{4} P_{max}$$

(3) 最大主応力説で破壊することから、この丸棒表面に生じる最大主応力を求める。荷重 P による垂直応力 σ_x と、トルク T によるせん断応力 τ_0 が組み合わされている状態なので、式(8.14)と 式(8.15)を用いると

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_0^2} \quad , \quad \theta_{01} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_0}{\sigma_x} \right)$$

と表すことができる。 $\sigma_1 = \sigma_{ult}$ となった時に丸棒は破壊し、その破面は θ_{01} に垂直となる。

問題 9.3 の解答

(1)薄肉円筒殻の周方向と軸方向の応力は

$$\sigma_\theta = \frac{Pr}{t} = \frac{300P}{10} = 30P \quad , \quad \sigma_z = \frac{Pr}{2t} = \frac{300P}{2 \times 10} = 15P$$

であり、薄肉円筒であるため、半径方向の応力 σ_r は 0 と考えてよい。これらが主応力で、 $\sigma_\theta = \sigma_1$, $\sigma_z = \sigma_2$, $\sigma_r = \sigma_3$ となる。

ミーゼスの降伏条件式(9.21)に上記値を代入し計算すると

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2$$

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - 0)^2 + (0 - \sigma_\theta)^2 = 2\sigma_Y^2$$

$$(15P)^2 + (15P)^2 + (30P)^2 = 2(300)^2$$

$$P = 11.547 \dots \approx 11.5[\text{MPa}]$$

と求めることができる。

(2)次にトレスカの降伏条件式(9.10)に各値を代入して計算すると

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_Y$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_Y$$

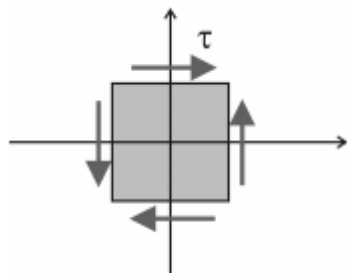
$$30P - 0 = 300$$

$$P = 10[\text{MPa}]$$

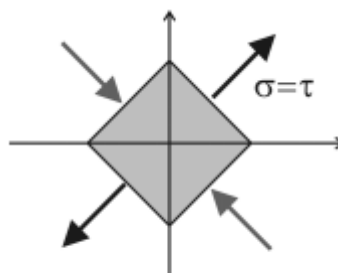
と求めることができる。

問題 9.4 の解答

(1) ねじりを受ける軸の表面の応力状態は、図(1)であり、これは図(2)と等価である。つまり、最大の引張、圧縮応力が生じる主応力方向は 45° 方向になるため、主応力方向にひずみゲージを貼る。



図(1)



図(2)

(補足) 図(1)と図(2)が等価であることは次のように証明する。

図(1)において法線が X 軸と $\theta = 45^\circ$ をなす面の応力は式(8.8)より、 $\sigma_x = 0$ 、 $\sigma_y = 0$ 、 $\tau_{xy} = \tau$ なので

$$\sigma'_x = \tau_{xy} \sin 2\theta = \tau$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\sigma'_y = -\tau_{xy} \sin 2\theta = -\tau$$

となり、法線が X 軸と 45° の角をなす面には垂直応力 τ 、せん断応力 0、また直角の面には垂直応力 $-\tau$ が作用しているので図(1)と図(2)は等価である。

(2)最初に式(4.23)を $d_1 = d$ 、 $d_2 = D$ 、 $M_t = T$ として変形すると

$$\tau = \frac{T}{Z_p} = \frac{16DT}{\pi(D^4 - d^4)}$$

になる。直径を半径に書き直すと

$$\tau = \frac{16 \times (2R)T}{\pi((2R)^4 - (2r)^4)} = \frac{2RT}{\pi(R^4 - r^4)} \quad (9.4.1)$$

となる。円筒表面は、平面応力状態と考えられるので、8 章で学んだ一般化された Hooke の法則における

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_x) \}$$

において

$$\varepsilon_x = \varepsilon, \quad \sigma_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_{\max} = \tau, \quad \sigma_y = \sigma_{\min} = -\tau$$

とおくと

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \{ \sigma_{\max} - \nu \sigma_{\min} \} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$$

と表すことができる。上記の式に式(9.4.1)と、縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比の間にある $G = E/2(1 + \nu)$ の関係式を代入すると、

$$\varepsilon = \frac{(1 + \nu)}{E} \frac{2RT}{\pi(R^4 - r^4)} = \frac{RT}{G\pi(R^4 - r^4)}$$

$$T = \frac{G\pi(R^4 - r^4)\varepsilon}{R}$$

と求めることができる。

問題 9.5 の解答

ねじりモーメント M_t だけが作用する場合は、式(9.25)に示したように、C点には、せん断応力

$$\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

が作用する。また、曲げモーメント M だけが作用した場合には、式(9.27)に示したように C 点で垂直応力が作用する。

$$\sigma_M = \frac{32M}{\pi d^3}$$

ここに、軸方向の力 N によって

$$\sigma_N = \frac{N}{\pi d^2/4} = \frac{4N}{\pi d^2}$$

が作用している。

ねじりモーメント M_t と曲げモーメント M と軸方向の力 N が同時に作用する場合には、上記の応力の重ね合わせを考えればよいので、せん断応力 $\tau = 16M_t/\pi d^3$ と、垂直応力としては、

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N = \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4N}{\pi d^2} = \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4Nd}{\pi d^3} = \frac{32}{\pi d^3} \left(M + \frac{Nd}{8} \right)$$

が作用していることになる。

これと、式(9.27)を見比べると、式中の M が $M + Nd/8$ に置き代わっているだけなので、式(9.28)以下の式展開において、 M に $M + Nd/8$ を代入すると、相当曲げモーメント M_e は

$$M_e = \frac{1}{2} \left\{ \left(M + \frac{Nd}{8} \right) + \sqrt{\left(M + \frac{Nd}{8} \right)^2 + M_t^2} \right\}$$

と表すことができる。

問題 9.6 の解答

式(9.42)において $\alpha = 60^\circ$ とする。また計算が楽になるように、 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2/2 = A$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2/2 = B$ とおくと

$$\varepsilon_a = A + B \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_b = A + B \cos 2(\theta + 60^\circ)$$

$$\varepsilon_c = A + B \cos 2(\theta + 120^\circ)$$

と置き換えることができる。これを加法定理により計算し整理すると

$$\varepsilon_a = A + B \cos 2\theta \quad (9.6.1)$$

$$\varepsilon_b = A - B \frac{\cos 2\theta}{2} - B \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta}{2} \quad (9.6.2)$$

$$\varepsilon_c = A - B \frac{\cos 2\theta}{2} + B \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta}{2} \quad (9.6.3)$$

となる。

式 (9.6.1) と式 (9.6.2) と式 (9.6.3) の辺々を足して

$$\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = 3A$$

式 (9.6.2) と式 (9.6.3) の辺々を足して

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c = 2A - B \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c - 2A = -B \cos 2\theta$$

$$-\varepsilon_a + A = -B \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_a - A = B \cos 2\theta \quad (9.6.4)$$

式 (9.6.2) と式 (9.6.3) の辺々を引いて

$$\varepsilon_c - \varepsilon_b = B\sqrt{3} \sin 2\theta$$

$$\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{\sqrt{3}} = B \sin 2\theta \quad (9.6.5)$$

の関係がある。式(9.6.4)と式(9.6.5)の辺々を2乗して足すと

$$(\varepsilon_a - A)^2 + \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{\sqrt{3}}\right)^2 = B^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$(\varepsilon_a - A)^2 + \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{\sqrt{3}}\right)^2 = B^2$$

となり、 B が求められる。上記の式を整理すると

$$A = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3}$$

$$B = \sqrt{(\varepsilon_a - A)^2 + \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_a)^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

となる。よって

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{2}{3}(\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_a)^2}$$

$$\tan 2\theta = \sqrt{3} \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c}$$

と求めることができる。

問題 9.7 の解答

(1) 8 章 P.155 で学んだひずみの座標変換の式を用いると

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2 \theta_1 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2 \theta_2 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2 \theta_3 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$

と表すことができる。

(2) 上記の式において, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$, $\theta_3 = 120^\circ$ を代入して計算・整理すると

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} + \frac{\sqrt{3}\gamma_{xy}}{4}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} - \frac{\sqrt{3}\gamma_{xy}}{4}$$

となる。上記式を ε_x , ε_y , γ_{xy} について解くと

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(3\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$$

と表すことができる。