軽量構造力学　　「小林雅彦解答」

式（2.3）の途中計算について

$$M=\int_A \sigma_{xi} y dA=\frac{1}{\rho}\int_{-t_m/2}^{t_m/2} E_i y^2 dy=\frac{2}{\rho}\int_0^{t_m/2} E_i y^2 dy$$

$$=\frac{2}{\rho}\left\{\int_0^{t_c/2} E_c y^2 dy+\int_{t_c/2}^{t_m/2} E_f y^2 dy\right\}$$

$$=\frac{2}{\rho}\left\{E_c\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{t_c/2}+E_f\left[\frac{y^3}{3}\right]_{t_c/2}^{t_m/2}\right\}$$

$$=\frac{2}{\rho}\left\{E_c\left(\frac{t_c{}^3}{24}\right)+E_f\left(\frac{t_m{}^3-t_c{}^3}{24}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{E_c t_c{}^3}{12}+\frac{E_f\left(t_m{}^3-t_c{}^3\right)}{12}\right\}$$

ここで、

$$I_c=\frac{t_c{}^3}{12}$$

$$I_f=\frac{t_f{}^3}{12}$$

$$I_1=\frac{t_f t^2}{2}=\frac{t_f\left(t_c+t_f\right)^2}{2}=\frac{t_c{}^2 t_f}{2}+t_c t_f{}^2+\frac{t_f{}^3}{2}$$

$$t_m{}^3 = (t_c + 2t_f)^3 = t_c{}^3 + 6t_c{}^2 t_f + 12 t_c t_f{}^2 + 8 t_f{}^3$$

$$t_m{}^3 - t_c{}^3 = 6t_c{}^2 t_f + 12 t_c t_f{}^2 + 8 t_f{}^3$$

$$\frac{t_m{}^3 - t_c{}^3}{12} = \frac{t_c{}^2 t_f}{2} + t_c t_f{}^2 + \frac{8}{12} t_f{}^3$$

$$= \left(\frac{t_c{}^2 t_f}{2} + t_c t_f{}^2 + \frac{6}{12} t_f{}^3 \right) + 2\left(\frac{t_f{}^3}{12} \right)$$

$$= I_1 + 2I_f$$

の関係より、

$$M = \frac{1}{\rho}\left[E_c I_c + E_f \left(I_1 + 2I_f \right) \right] = \frac{1}{\rho}\left[E_c I_c + 2E_f I_f + E_f I_1 \right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(D_c + 2D_f + D_1 \right)$$

と表せる。